

# 7-dniowa powtórka do matury z matmy



Dokładnie rozpisane  
odpowiedzi

KONCENTRAT



Z MATMY

Joanna Świętostawska

# Kilka słów na początek

Umieściłam tu rozpisane odpowiedzi do wszystkich zadań. Chcesz jeszcze dokładniejszych opisów, krok po kroku i z obrazkami? Znajdziesz je w e-booku i Karcie Wzorów Maturalnego Koncentratu z Matmy. Niestety tutaj nie miałam wystarczająco miejsca, aby wszystko aż tak szczegółowo opisywać (wtedy ten plik miałby jakieś 400 stron!).

Za każdym razem, gdy piszę “Karta Wzorów” mam na myśli Ulepszoną Kartę Wzorów dołączoną do Maturalnego Koncentratu z Matmy. Pamiętaj jednak, że te same wzory znajdziesz w “zwykłej” karcie wzorów (ta sama którą będziesz mieć na maturze). Oczywiście tam będą one bez przykładów i obrazków.

Przypominam, że dzień przed maturą otrzymasz ode mnie na maila pliki z mini maturką i rozwiązaniami do niej. Także bądź czujny\_a!



# 7-dniowy Plan Nauki do Matury

## Dzień 1: Algebra

1. Wartość bezwzględna
2. Potęgi
3. Pierwiastki
4. Logarytmy
5. Wzory skróconego mnożenia
6. Podzielność - dowody
7. Wyrażenia wymierne

## Dzień 2: Równania i nierówności

1. Liczba rozwiązań równania
2. Równania wielomianowe
3. Nierówności
4. Układy równań

## Dzień 3: Funkcje i ciągi

1. Funkcja liniowa
2. Funkcja kwadratowa
3. Ciąg arytmetyczny
4. Ciąg geometryczny

## **Dzień 4: Geometria płaska i trygonometria**

1. Funkcje trygonometryczne
2. Twierdzenie cosinusów
3. Kąty w okręgu
4. Pola i obwody figur
5. Figury podobne
6. Twierdzenie dwusiecznej kąta

## **Dzień 5: Geometria analityczna i przestrzenna**

1. Proste prostopadłe i równoległe
2. Równanie okręgu
3. Ostrosłupy
4. Graniastopy

## **Dzień 6: Statystyka i prawdopodobieństwo**

1. Kombinatoryka
2. Diagramy, średnia arytmetyczna i mediana
3. Prawdopodobieństwo
4. Optymalizacja

## **Dzień 7: Mini maturka + odpoczynek**

1. Mini maturka
2. Odpoczynek

# Dzień 1: Algebra

## Wartość bezwzględna

Zadanie 1. (0-1)



Dana jest nierówność

$$|x - 1| \geq 3$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.



mniejszy lub  
równy (-2)

B.

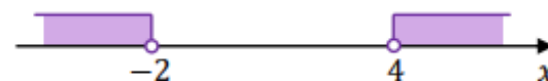


większy lub  
równy 4

C.



D.



Brudnopis

$$x - 1 \geq 3 \quad \checkmark \quad x - 1 \leq -3$$

$$x \geq 3 + 1 \quad \checkmark \quad x \leq -3 + 1$$

$$x \geq 4 \quad \checkmark \quad x \leq -2$$

Czytamy:  $x$  jest większy lub równy 4 lub  $x$  jest mniejszy lub równy (-2)

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Szczegółowo opisany sposób rozwiązywania takich zadań i to czym jest wartość bezwzględna znajdziesz w e-booku Maturalny Koncentrat z Matmy (zadanie 8, strona 25).



Zadanie 1. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich całkowitych rozwiązań nierówności  $|x + 1| < 3$  jest równa

A. 2

B. 3

**C. 5**

D. 7

*Brudnopis*

$$\begin{array}{l} x + 1 < 3 \quad \wedge \quad x + 1 > -3 \\ x < 3 - 1 \quad \wedge \quad x > -3 - 1 \\ x < 2 \quad \wedge \quad x > -4 \end{array}$$

Czytamy:  $x$  jest mniejszy od 2 i  $x$  jest większy od (-4)


Czyli  $x$  jest od (-4) do 2. Pomędzy (-4) i 2 mamy takie liczby całkowite: -3, -2, -1, 0, 1.

Jest ich pięć, więc odpowiedź to C!

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Liczby całkowite opisałam w Maturalny Koncentrat z Matmy (zadanie 9, strona 30).



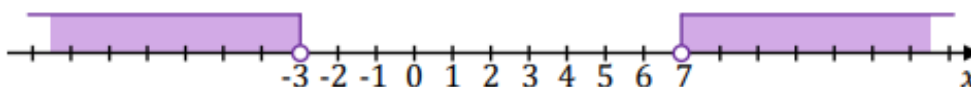
Zadanie 1. (0-1) 

Dana jest nierówność

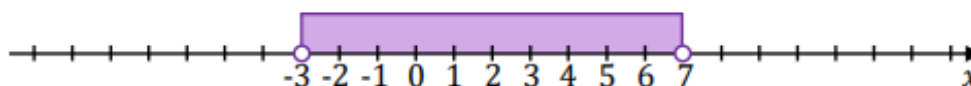
$$|x - 5| < 2$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

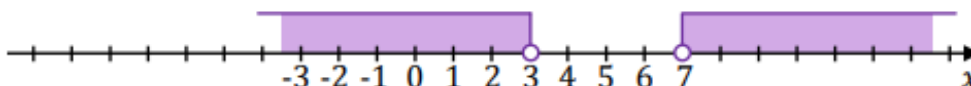
A.



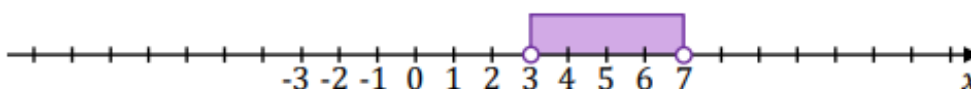
B.



C.



**D.**



Brudnopis	$x - 5 < 2$	$\wedge$	$x - 5 > -2$
	$x < 2 + 5$	$\wedge$	$x > -2 + 5$
	$x < 7$	$\wedge$	$x > 3$

**Czytamy: x jest mniejszy od 7 i x jest większy od 3**  
Przedział od 3 do 7 jest narysowany w odpowiedzi D.

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

# Potęgi

## Zadanie 5. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia  $\frac{3^{-1}}{\left(-\frac{1}{9}\right)^{-2}} \cdot 81$  jest równa

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\left(-\frac{1}{3}\right)$

C. 3

D.  $(-3)$

*Brudnopis*

$$\frac{3^{-1}}{\left(-9\right)^2} \cdot 81 = \frac{3^{-1}}{\left(-9\right)^2} \cdot = \frac{\frac{1}{3}}{81} \cdot \cancel{81} =$$
$$= \frac{1}{3}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023  
Nie wiesz co zrobić gdy jest minus w “potędze”? Masz to w karcie wzorów. Wstawię Ci fragment mojej Ulepszonej Karty Wzorów, byś mógł\_mogła zobaczyć to na przykładzie:

**Przykłady**

- Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla  $a \neq 0$ :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  oraz  $a^0 = 1 \rightarrow 3^0 = 1$

Podniesienie dowolnej liczby do zerowej potęgi da 1.

Kiedy wykładnik potęgi (tu:  $-2$ ) jest ujemny to liczbę potęgowaną (tu: 3) odwracamy

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

**Odwrócenie liczby:**

zmienienie licznika z mianownikiem.

Liczby całkowite (np. 3) mają w mianowniku 1.

**Zadanie 2. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\left(\frac{1}{16}\right)^8 \cdot 8^{16}$  jest równaA.  $2^{24}$  B.  $2^{16}$ C.  $2^{12}$ D.  $2^8$ 

Brudnopis

$$\left(\frac{1}{2^4}\right)^8 \cdot (2^3)^{16} = (2^{-4})^8 \cdot 2^{48} = 2^{-32} \cdot 2^{48} = 2^{16}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Aby dzielić i mnożyć potęgi (wzory są w karcie wzorów) musisz mieć takie same podstawy potęgi (czyli te liczby, które “podnosisz do potęgi”). Dlatego 16 i 8 zamieniłam na potęgi dwójki.

**Dlaczego dodajemy wykładniki (te małe liczby na górze), gdy mnożymy potęgi?**

- Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to:

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{2} \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \text{3} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ \text{4} \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad \text{5} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \end{array}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ .

$$\text{1} \quad 5^2 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5}_{5^2} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3} = 5^{2+3} = 5^5$$

Fragment pochodzi z Ulepszonej Karty Wzorów dołączonej do Maturalnego Koncentratu z Matmy.

**Zadanie 2. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\left(\frac{4}{25}\right)^{-0,5}$  jest równa

A. 0,04

B. 0,8

C. 2,5

D. 0,4

Brudnopis

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2,5$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Tutaj znowu skorzystałam ze wzoru, który mamy w karcie wzorów. Fragment z Ulepszonej Karty Wzorów dołączonej do Maturalnego Koncentratu z Matmy.


- dla  $a \geq 0$ :  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

"potęga"  
(wykładnik potęgi)

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

stopień  
pierwiastka

# Pierwiastki

Zadanie 2. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$  jest równa

A.  $(-\frac{3}{2})$

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $(-\frac{2}{3})$


Brudnopis

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{16} \cdot 2} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Gdy mnożysz lub dzielisz dwa pierwiastki, które mają **ten sam stopień**, możesz zapisać je pod jednym znakiem pierwiastka. Lub rozdzielić spod wspólnego znaku.

**Pamiętaj: tak można tylko przy mnożeniu i dzieleniu!**

Zadanie 2. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $3\sqrt{45} - \sqrt{20}$  jest równa

A.  $(7 \cdot 5)^{\frac{1}{2}}$

B.  $5^{\frac{1}{2}}$

C. 7

**D.**  $7 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

Brudnopis

$\begin{array}{r l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$	$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
		$3\sqrt{45} - \sqrt{20} = 3 \cdot 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} =$	
		$= 9\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 7\sqrt{5} = 7 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$	

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Jak wyciągać liczbę przed znak pierwiastka opisałam szczegółowo w Maturalnym Koncentracie z Matmy (zadanie 20, strona 82). A tu mały Game Changer na dodawanie i odejmowanie pierwiastków (i innych dziwactw):




Nie możesz dodać (ani odjąć) do siebie wyrażeń (liczb i liter) jeśli nie są wyrazami podobnymi.

**Jak poznać czy wyrazy są podobne?** Przy liczbie jest dokładnie taka sama litera/znaczek. Możesz wyobrazić sobie np., że  $a$  to kotek, liczba  $\pi$  piesek, a pierwiastek z 3 to mysz. Nie dodasz do siebie myszy i psa, prawda?

$$3a + 2\pi - 8\sqrt{3} + 2a = 5a + 2\pi - 8\sqrt{3}$$

$$3\text{🐶} + 2\text{🐱} - 8\text{🐭} + 2\text{🐶} = 5\text{🐶} + 2\text{🐱} - 8\text{🐭}$$

# Logarytmy

Zadanie 4. (0–1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\log_9 27 + \log_9 3$  jest równa

A. 81

B. 9

C. 4

D. 2

Brudnopis

$$\log_9 27 \cdot 3 = \log_9 81 = 2$$

Logarytm odpowiada na pytanie: **do jakiej potęgi trzeba podnieść 9, aby uzyskać 81?**

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Zadanie z logarytmem znajduje się na stronie 5 (zadanie 2) w ebooku Koncentratu z Matmy.

Szczegółowe informacje o logarytmach wraz z przykładami znajdują się w Ulepszonej Karcie Wzorów na stronie 13.

Zadanie 4. (0–1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\log_{\sqrt{3}} 9$  jest równa

A. 2

B. 3

C. 4

D. 9

Brudnopis

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = ? \quad \rightarrow \quad \sqrt{3}^2 = 9$$
$$\sqrt{3}^4 = 9$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 2. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\log_3 \left(\frac{3}{2}\right) + \log_3 \left(\frac{2}{9}\right)$  jest równa

A.  $\log_3 \frac{31}{18}$

B.  $\log_3 \frac{5}{11}$

C.  $(-1)$

D.  $\frac{1}{3}$

*Brudnopis*

$$\log_3 \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} \right) = \log_3 \left( \frac{6}{18} \right) = \log_3 \left( \frac{1}{3} \right) = -1$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Aby odwrócić liczbę (zamienić licznik z mianownikiem) musisz ponieść tę liczbę do  $(-1)$ .

**Zadanie 4. (0–2)**

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wy kropkowanych miejscach.

Prawdziwe są równości: ..... **C** ..... oraz ..... **E** .....

- A.  $\log_2 16 + \log_2 9 = \log_2 25$
- B.  $\log_2 16 + \log_2 9 = 2 \cdot \log_2 5$
- C.  $\log_2 16 + \log_2 9 = \log_2 144$
- D.  $\log_2 16 + \log_2 9 = \log_4 144$
- E.  $\log_2 16 + \log_2 9 = 4 + 2 \cdot \log_2 3$
- F.  $\log_2 16 + \log_2 9 = 2 \cdot \log_4 12$

*Brudnopis*

$$\log_2 16 + \log_2 9 = \log_2 144$$

$$\log_2 16 = 4, \text{ bo } 2^4 = 16$$


$$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \log_2 3$$

$$\log_2 16 + \log_2 9 = 4 + 2 \log_2 3$$

Tak, też uważam, że to zadanie jest bez sensu. Po prostu musisz kombinować ze wzorami. Oczywiście masz je w karcie wzorów. W Ulepszonej Karcie Wzorów na stronie 14.

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

# Wzory skróconego mnożenia

Zadanie 6. (0–1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia  $(2 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 2)^2$  jest równa

A.  $(-2\sqrt{3})$

B. 0

C. 6

D.  $8\sqrt{3}$

*Brudnopis*

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 2)^2 &= 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - \\ &- (\sqrt{3}^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2^2) = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - \\ &- (3 - 4\sqrt{3} + 4) = \underline{4} - \underline{4\sqrt{3}} + \underline{3} - \underline{3} + \\ &+ \underline{4\sqrt{3}} - \underline{4} = 0 \end{aligned}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

**Uważaj na minus przed nawiasem! Zmienia znaki w nawiasie na przeciwne.** Ale najpierw podnosisz do potęgi (czyli używasz wzorów skróconego mnożenia).

Sposób na wzory skróconego mnożenia (bez ich używania) umieściłam w Ulepszonej Karcie Wzorów na stronie 15.

Z kolei bardzo podobne zadanie, z obszernym wyjaśnieniem, jest w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy. na stronie 10 (zadanie 4).

**Zadanie 5. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  wyrażenie  $(2a - 3)^2 - (2a + 3)^2$  jest równe

A.  $-24a$

B.  $0$

C.  $18$

D.  $16a^2 - 24a$

Brudnopis

$$\begin{aligned}(2a-3)^2 - (2a+3)^2 &= 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 9 - \\ &- (4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 9) = 4a^2 - 12a \\ &+ 9 - (4a^2 + 12a + 9) = \\ &= \underline{4a^2} - \underline{12a} + \underline{9} - \underline{4a^2} - \underline{12a} - \underline{9} = \\ &= -12a - 12a = -24a\end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

**Zadanie 5. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $b$  wartość wyrażenia  $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$  jest równa wartości wyrażenia

A.  $8a^2$

B.  $8ab$

C.  $-8ab$

D.  $2b^2$

Brudnopis

$$\begin{aligned} (2a+b)^2 - (2a-b)^2 &= 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 - \\ &- (4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot b + b^2) = 4a^2 + 4ab + b^2 - \\ &- (4a^2 - 4ab + b^2) = \underline{4a^2} + \underline{4ab} + \underline{b^2} - \\ &- \underline{4a^2} + \underline{4ab} - \underline{b^2} = 8ab \end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

# Podzielność - dowody

## Zadanie 3. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $(2n + 1)^2 - 1$  jest podzielna przez 8.

$$\begin{aligned}(2n + 1)^2 - 1 &= 4n^2 + 4n + 1 - 1 = \\ &= 4n^2 + 4n = 4n(n + 1)\end{aligned}$$

Liczba  $4n(n + 1)$  to iloczyn liczby 4 i dwóch kolejnych liczb naturalnych:  $n$  oraz  $n + 1$ . Wśród kolejnych dwóch liczb naturalnych na pewno znajduje się liczba parzysta.

Iloczyn liczby 4 i dowolnej liczby parzystej jest podzielny przez 8.

W Maturalnym Koncentracie z Matmy zadanie na podzielność znajduje się na stronie 30 (zadanie 9).

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

#### Zadanie 4. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $3n^3 + 18n^2 + 15n$  jest podzielna przez 6.

$$3n^3 + 18n^2 + 15n = 3n(n^2 + 6n + 5)$$

$$n^2 + 6n + 5$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$n_1 = \frac{-6+4}{2} = -1 \quad n_2 = \frac{-6-4}{2} = -5$$

$$3n(n^2 + 6n + 5) = 3n \underbrace{(n+1)}_{\downarrow} \underbrace{(n+5)}_{\downarrow}$$

dwie kolejne l. natur.

Wśród kolejnych dwóch liczb naturalnych znajduje się przynajmniej jedna liczba parzysta. Mnożąc 3 i liczby parzystej jest podzielny przez 6.

Iloczyn to wynik mnożenia.

Dwie kolejne liczby naturalne to np.: 2 i 3, 6 i 7, 117 i 118.

Zawsze jedna z nich będzie parzysta.

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

### Zadanie 3. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 &= \underline{n^2} + \underline{n^2} + \underline{2n+1} + \\ &+ \underline{n^2} + \underline{4n} + \underline{4} = 3n^2 + 6n + 5 = \\ &= 3n^2 + 6n + \underline{3} + 2 = 3(\underline{n^2 + 2n + 1}) + 2 \end{aligned}$$

Chcemy 2 reszty, więc rozbijamy piątkę na 3+2. W dodatku dzięki temu możemy wyciągnąć 3 przed nawias!

↑  
jakas  
liczba

Gdy jakąkolwiek liczbę pomnożymy przez 3 to będzie ona podzielna przez 3.

Jeśli do liczby podzielnej przez 3 dodamy dwa to ta liczba przy dzieleniu przez 3 będzie dawać resztę 2, bo o te dwa jest "za dużo", aby liczba była podzielna przez 3.

Liczba podzielna przez 3 - liczba, która dzieli się bez reszty przez 3. Czyli wychodzi nam "równo", bez ułamka.

### Zadanie 3. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $(2n + 5)^2 + 3$  jest podzielna przez 4.

$$\begin{aligned}(2n + 5)^2 + 3 &= 4n^2 + 2 \cdot 2n \cdot 5 + 25 + 3 = \\ &= 4n^2 + 20n + 28 = 4(n^2 + 5n + 7)\end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Jeśli masz udowodnić podzielność przez jakąś liczbę np. 4 i możesz zapisać wyrażenie jako mnożenie 4 i jakiegokolwiek innej liczby (najczęściej nawiasu z jakimiś dziwnymi liczbami) to jesteś w domu!

To najprostszy sposób i nawet nie trzeba go jakoś szczególnie uzasadniać → iloczyn (pomnożenie) 4 i jakiegokolwiek innej liczby da liczbę podzielną przez 4.

# Wyrażenia wymierne

Zadanie 8. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  różnej od:  $(-1)$ ,  $0$  i  $1$ , wartość wyrażenia  $\frac{2x^2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x}$  jest równa wartości wyrażenia

A.  $2x + 2$

B.  $\frac{2x}{x-1}$

C.  $\frac{2x}{x^2-1}$

D.  $\frac{2x^3+1}{x^3-1}$

Brudnopis

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x} &= \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} = \\ &= \frac{2x^{\cancel{2}^x}}{(x-1)\cancel{(x+1)}_1} \cdot \frac{\cancel{x+1}^1}{\cancel{x}_1} = \frac{2x}{(x-1) \cdot 1} \cdot \frac{1}{1} = \\ &= \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$


Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Korzystamy tu z trzeciego wzoru skróconego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad 2^2 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$$

# Dzień 2: Równania i nierówności

## Liczba rozwiązań równania

Zadanie 8. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie  $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2} = 0$  w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. nie ma rozwiązania.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $-1$ .
- C. ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $1$ .
- D. ma dokładnie dwa rozwiązania:  $-1$  oraz  $1$ .

Brudnopis	
Dziedzina:	$\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2} = 0 / \cdot (x-1)(x+1)^2$
$x-1 \neq 0 \wedge x+1 \neq 0$	$(x+1)(x-1)^2 = 0$
$x \neq 1 \wedge x \neq -1$	$x+1=0 \vee x-1=0$
$D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$	$x = -1 \vee x = 1$
Zatem brak rozwiązań.	$\notin D$ nie należy do dziedziny

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

O tym jak i kiedy (oraz dlaczego) liczyć dziedzinę, gdy  $x$  jest w mianowniku napisałam w Maturalnym Koncentracie z Matmy (zadanie 7, strona 22).

Tutaj liczymy dziedzinę, bo w mianowniku nie może być 0! Kreska ułamkowa oznacza dzielenie, a przez 0 dzielić nie wolno. Dlatego nigdy w mianowniku (czyli na dole ułamka) nie może nam wychodzić 0.

**Zadanie 7. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie  $\frac{x+1}{(x+2)(x-3)} = 0$  w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. nie ma rozwiązania.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $(-1)$ .
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania:  $(-2)$  oraz  $3$ .
- D. ma dokładnie trzy rozwiązania:  $(-1)$ ,  $(-2)$  oraz  $3$ .

*Brudnopis*

Dziedzina:

$$x+2 \neq 0 \wedge x-3 \neq 0$$
$$x \neq -2 \wedge x \neq 3$$
$$D = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$
$$\frac{x+1}{(x+2)(x-3)} = 0 \quad | \cdot (x+2)(x-3)$$
$$x+1 = 0$$
$$x = -1$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 6. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie  $\frac{x(x+5)(2-x)}{2x+4} = 0$  w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania:  $(-5)$  oraz  $2$ .
- B. dwa rozwiązania:  $(-5)$  oraz  $0$ .
- C. trzy rozwiązania:  $(-5)$ ,  $0$  oraz  $2$ .
- D. cztery rozwiązania:  $(-5)$ ,  $(-2)$ ,  $0$  oraz  $2$ .

Brudnopis	
Dziedzina:	$\frac{x(x+5)(2-x)}{2x+4} = 0 \quad / \cdot (2x+4)$
$2x+4 \neq 0$	$x(x+5)(2-x) = 0$
$2x \neq -4 \quad / : 2$	$x = 0 \vee x+5 = 0 \vee 2-x = 0$
$x \neq -2$	$x = 0 \vee x = -5 \vee x = 2$
$D = \mathbb{R} - \{-2\}$	

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Gdyby na koniec wyszło nam, że jedno z rozwiązań to  $x = -2$  to musielibyśmy je odrzucić.

# Równania wielomianowe

Zadanie 7. (0-3)

Rozwiąż równanie

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned}x^3 + 5x^2 - 2x - 10 &= 0 \\x^2(x+5) - 2(x+5) &= 0 \\(x+5)(x^2-2) &= 0 \\x+5=0 \quad \checkmark \quad x^2-2=0 \\x=-5 \quad \checkmark \quad x^2=2 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\x=-5 \quad \checkmark \quad x=\sqrt{2} \quad \checkmark \quad x=-\sqrt{2} \\&\quad \checkmark \quad \text{bo } (\sqrt{2})^2 = 2\end{aligned}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Koniecznienie naucz się rozwiązywać tego typu zadanie, bo pojawia się za każdym razem na maturze, więc są duże szanse, że i w tym roku będzie.

Najpierw musisz wyciągnąć coś dwa razy przed nawias, aby mieć w obu nawiasach to samo. Na pewno przed pierwszym nawiasem będzie  $x^2$  (i być może jakaś liczba), a przed drugim jakaś liczba (może być 1 lub -1!).

Jeśli chcesz sprawdzić czy dobrze wyciągnęłaś\_ętaś przed nawias: wymnóż z powrotem i sprawdź czy wyszło to co było na początku.

**Zadanie 10. (0-3)**

Rozwiąż równanie

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

$$4x^2(x-3) - 1(x-3) = 0$$

$$(x-3)(4x^2-1) = 0$$

$$x-3=0 \quad \vee \quad 4x^2-1=0$$

$$x=3 \quad \vee \quad 4x^2=1 \quad | :4$$

$$x=3 \quad \vee \quad x^2=\frac{1}{4} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x=3 \quad \vee \quad x=\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=-\frac{1}{2}$$

bo zarówno  $(\frac{1}{2})^2$  jak i  $(-\frac{1}{2})^2$  dają  $\frac{1}{4}$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 9. (0-3)**

Rozwiąż równanie

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - 3x + 6 &= 0 \\x^2(x-2) - 3(x-2) &= 0 \\(x-2)(x^2-3) &= 0 \\x-2=0 \quad \vee \quad x^2-3=0 \\x=2 \quad \vee \quad x^2=3/\sqrt{\phantom{x}} \\x=2 \quad \vee \quad x=\sqrt{3} \quad \vee \quad x=-\sqrt{3}\end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 9. (0-3)**

Rozwiąż równanie


$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 &= 0 \\ x^2(3x-2) - 4(3x-4) &= 0 \\ (3x-2)(x^2-4) &= 0 \\ 3x-2=0 \quad \vee \quad x^2-4=0 \\ 3x=2 \quad | :3 \quad \vee \quad x^2=4 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\ x=\frac{2}{3} \quad \vee \quad x=2 \quad \vee \quad x=-2 \end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Zadanie 7. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jednym z rozwiązań równania  $\sqrt{3}(x^2 - 2)(x + 3) = 0$  jest liczba

A. 3

B. 2

C.  $\sqrt{3}$

**D.  $\sqrt{2}$**

Brudnopis

$$\sqrt{3}(x^2 - 2)(x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$

$$x^2 = 2 \quad | \sqrt{\quad} \quad \vee \quad x = -3$$

$$x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = -3$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

# Nierówności

Zadanie 5. (0-1)



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{3(6-x)}{17} \leq 3$$

jest przedział

A.  $(-\infty, -11)$

B.  $(-\infty, -11]$

C.  $(-11, +\infty)$

D.  $[-11, +\infty)$

*Brdnopis*

$\frac{3(6-x)}{17} \leq 3 \quad   \cdot 17$	$18 - 3x \leq 51$
$3(6-x) \leq 3 \cdot 17$	$-3x \leq 51 - 18$
$3(6-x) \leq 51$	$-3x \leq 33 \quad   :(-3)$
	$x \geq -11$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

**Gdy mnożysz lub dzielisz obie strony nierówności przez liczbę na minusie musisz odwrócić znak nierówności w drugą stronę!**

Informacje jak zapisywać przedziały znajdziesz w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy na stronie 28.

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich całkowitych dodatnich rozwiązań nierówności

$$\frac{3x - 5}{12} < \frac{1}{3}$$

jest równa

- A. 2                      B. 3                      C. 5                      D. 6

*Brudnopis*

$\frac{3x-5}{12} < \frac{1}{3} \quad   \cdot 12$	$3x - 5 < 4$
$3x - 5 < \frac{1}{3} \cdot 12$	$3x < 4 + 5$
$3x - 5 < \frac{12}{3}$	$3x < 9 \quad   :3$
	$x < 3$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 6. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$-2(x+3) \leq \frac{2-x}{3}$$

jest przedział

A.  $(-\infty, -4]$

B.  $(-\infty, 4]$

C.  $[-4, \infty)$

D.  $[4, \infty)$

*Brudnopis*

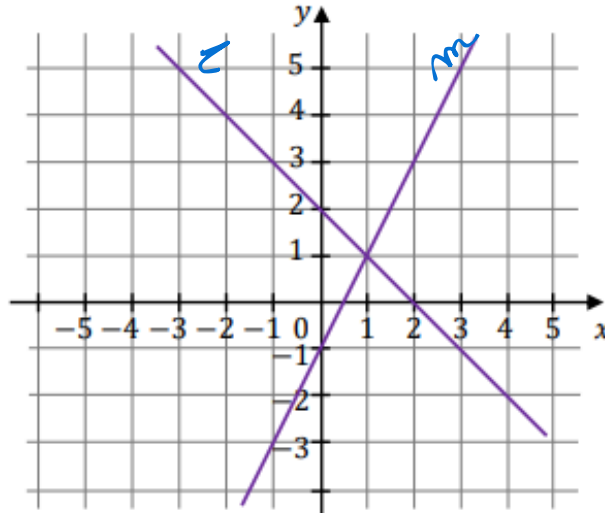
$-2(x+3) \leq \frac{2-x}{3} \quad   \cdot 3$	$-5x \leq 2+18$
$-6(x+3) \leq 2-x$	$-5x \leq 20 \quad   :(-5)$
$-6x-18 \leq 2-x$	$x \geq -4$
$-6x-18+x \leq 2$	
$-5x-18 \leq 2$	

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

# Układy równań

## Zadanie 10. (0–1)

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  jednego z niżej zapisanych układów równań A–D.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, jest

A.  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Co oznaczają współczynniki  $a$  i  $b$ :  
Maturalny Koncentrat z Matmy,  
e-book strona 44 (zadanie 11).

Brudnopis	współczynnik $a$	współcz. $b$
prosta $l$	na minusie	2
prosta $m$	na plusie	-1
Pasuje tylko odp. D.		

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

**Zadanie 10. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , punkt  $(-8, 6)$  jest punktem przecięcia prostych o równaniach

A.  $2x + 3y = 2$  i  $-x + y = -14$ .

B.  $3x + 2y = -12$  i  $2x + y = 10$ .

C.  $x + y = -2$  i  $x - 2y = 4$ .

D.  $x - y = -14$  i  $-2x + y = 22$ .

D:  $-8 - 6 = -14$   
 $-14 = -14 \checkmark$

$-2 \cdot (-8) + 6 = 22$

$16 + 6 = 22$

$22 = 22 \checkmark$

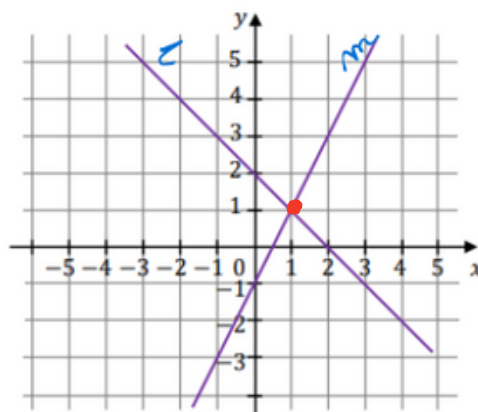
Brudnopis

A: $2 \cdot (-8) + 3 \cdot 6 = 2$ $-16 + 18 = 2$ $2 = 2 \checkmark$	B: $3 \cdot (-8) + 2 \cdot 6 = -12$ $-24 + 12 = -12$ $-12 = -12 \checkmark$	C: $-8 + 6 = -2$ $-2 = 2 \checkmark$ $-8 - 2 \cdot 6 = 4$ $-8 - 12 \neq 4 \times$ sprz.
$-(-8) + 6 = -14$ $8 + 6 \neq -14 \times$ sprz.	$2 \cdot (-8) + 6 = 10$ $-16 + 6 \neq 10 \times$ sprz.	

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Jeśli dwie proste się przecinają oznacza to, że mają tylko jeden punkt wspólny. Na rysunku poniżej mamy proste l i m z poprzedniego zadania. Proste te mają **tylko jeden punkt wspólny: (1,1)**.

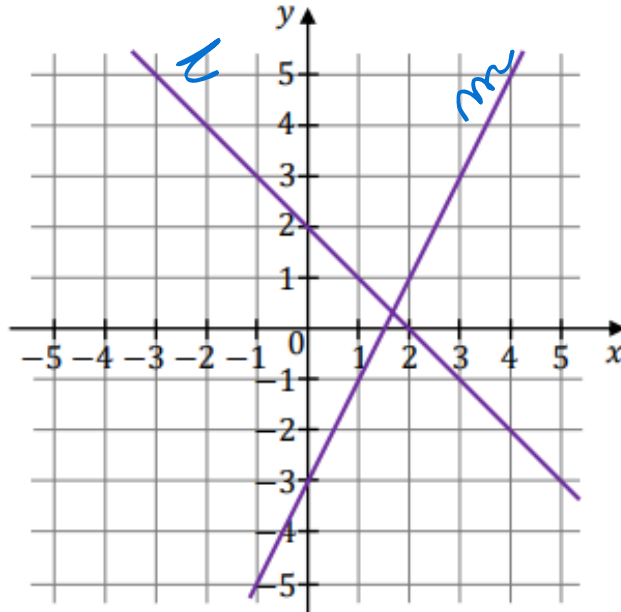
Co to dla nas oznacza? Że jeśli proste z naszego zadania mają przecinać się w punkcie  $(-8, 6)$ , to ten punkt musi należeć do obu tych prostych.



Wystarczy zatem ten punkt podstawić  $(-8$  za  $x$ ,  $6$  za  $y)$  do każdej prostej i sprawdzić w którym podpunkcie nie wychodzi sprzeczność w żadnym z równań.

**Zadanie 8. (0–1)**

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , przedstawiono interpretację geometryczną jednego z poniższych układów równań A–D.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, jest

A.  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

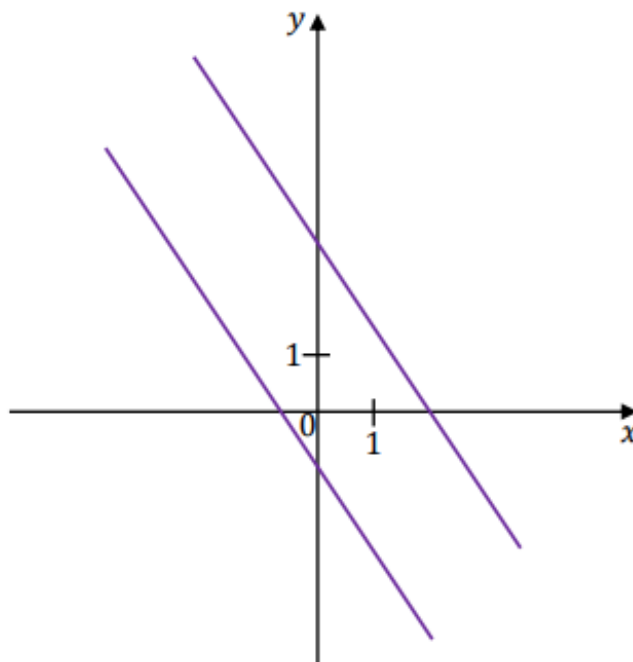
Rozwiązanie podobnego zadania:  
Maturalny Koncentrat z Matmy, e-book  
 strona 44 (zadanie 11).

Brudnopis	współczynnik a	współc. b
prosta l	na minusie	2
prosta m	na plusie	-3
Pasuje tylko odp. B.		

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

**Zadanie 11. (0–1)**

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , przedstawiono dwie proste równoległe, które są interpretacją geometryczną jednego z poniższych układów równań A–D.



**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, jest

**A.**  $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

**C.**  $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

**D.**  $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

Współczynniki “a” (ta liczba przy x) w obu równaniach tych prostych muszą być na minusie, ponieważ obie są malejące.

Pasuje tylko A.

**Uwaga:** Gdyby w odpowiedziach jeszcze była inna odpowiedź, gdzie w obu równaniach “a” jest na minusie to musisz skorzystać z informacji, że “a” jest jednakowe dla prostych równoległych.

Maturalny Koncentrat z Matmy e-book  
strona 76, zadanie 19.

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 10. (0–1)**

W październiku 2022 roku założono dwa sady, w których posadzono łącznie 1960 drzew. Po roku stwierdzono, że uszło 5% drzew w pierwszym sadzie i 10% drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano.

Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła 60% liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie.

Niech  $x$  oraz  $y$  oznaczają liczby drzew posadzonych – odpowiednio – w pierwszym i drugim sadzie.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Układem równań, którego poprawne rozwiązanie prowadzi do obliczenia liczby  $x$  drzew posadzonych w pierwszym sadzie oraz liczby  $y$  drzew posadzonych w drugim sadzie, jest

- A.  $\begin{cases} x + y = 1960 \\ 0,6 \cdot 0,95x = 0,9y \end{cases}$
- B.  $\begin{cases} x + y = 1960 \\ 0,95x = 0,6 \cdot 0,9y \end{cases}$
- C.  $\begin{cases} x + y = 1960 \\ 0,05x = 0,6 \cdot 0,1y \end{cases}$
- D.  $\begin{cases} x + y = 1960 \\ 0,4 \cdot 0,95x = 0,9y \end{cases}$

*Brudnopis*

$x$  – l. drzew w sadzie I  
 $y$  – l. drzew w sadzie II

Po roku zostało:

95% drzew w sadzie I  $\rightarrow 0,95x$   
90% drzew w sadzie II  $\rightarrow 0,9y$   
w II zostało 60% (czyli 0,6) tego co zostało w I  
 $0,9y = 0,6 \cdot 0,95x$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 7. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -4x + 8y = -12 \end{cases}$

- A. nie ma rozwiązań.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
- D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

*Brudnopis*

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -4x + 8y = -12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -4(3 + 2y) + 8y = -12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -12 - 8y + 8y = -12 \\ -12 = -12 \end{cases}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Jest nieskończenie wiele rozwiązań, bo bez względu na to jakie liczby podstawimy za  $x$  i  $y$  to ostatecznie wyjdzie  $-12 = -12$ .  $-12$  naprawdę równa się  $-12$ !

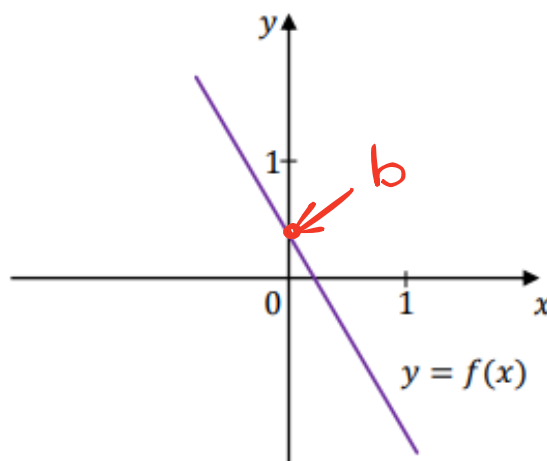
Gdyby wyszło na koniec np.  $3 = 8$  (to nie jest prawda...) to równanie byłoby sprzeczne (czyli nie miałyby żadnego rozwiązania). Bo bez względu na to co byśmy podstawili pod  $x$  i  $y$  to na koniec wyszłaby nam nieprawda (czyli sprzeczność).

# Dzień 3: Funkcje i ciągi

## Funkcja liniowa

### Zadanie 13. (0–1)

Funkcja liniowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji  $f$  w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $a$  oraz liczba  $b$  we wzorze funkcji  $f$  spełniają warunki:

A.  $a > 0$  i  $b > 0$ .

B.  $a > 0$  i  $b < 0$ .

C.  $a < 0$  i  $b > 0$ .

D.  $a < 0$  i  $b < 0$ .

Brudnopis

$$a < 0 \text{ i } b > 0$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Funkcja maleje, więc “a” musi być na minusie. Z kolei punkt przecięcia z osią Y (pionową) jest powyżej osi X (poziomej), więc “b” musi być na plusie. Szczegółowo wyjaśniłam prawie identyczne zadanie w [e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy](#) w zadaniu 11, na stronie 44.

**Zadanie 12. (0-1)**

Funkcja liniowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = (-2k + 3)x + k - 1$ , gdzie  $k \in \mathbb{R}$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja  $f$  jest malejąca dla każdej liczby  $k$  należącej do przedziału

- A.  $(-\infty, 1)$       B.  $(-\infty, -\frac{3}{2})$       C.  $(1, +\infty)$       **D.  $(\frac{3}{2}, +\infty)$**

*Brudnopis*

$-2k + 3 < 0$   
 $-2k < -3 \quad | : (-2)$   
 $k > \frac{3}{2}$

Pamiętaj, że w nierównościach, gdy mnożysz lub dzielisz stronami przez liczbę na minusie to musisz odwrócić znak nierówności w drugą stronę!

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Funkcja jest malejąca, gdy współczynnik "a" (ta liczba przy x) jest na minusie (czyli jest mniejsza od zera).

Tym razem przy x nie mam konkretnej liczby, tylko cały nawias  $(-2k+3)$ . Zatem musimy policzyć, kiedy ten nawias będzie na minusie. Czyli  $-2k+3 < 0$ . I obliczamy dla jakiego "k" tak faktycznie jest.

**Zadanie 13. (0-1)**

Funkcje liniowe  $f$  oraz  $g$ , określone wzorami  $f(x) = 3x + 6$  oraz  $g(x) = ax + 7$ , mają to samo miejsce zerowe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik  $a$  we wzorze funkcji  $g$  jest równy

A.  $(-\frac{7}{2})$

B.  $(-\frac{2}{7})$

C.  $\frac{2}{7}$

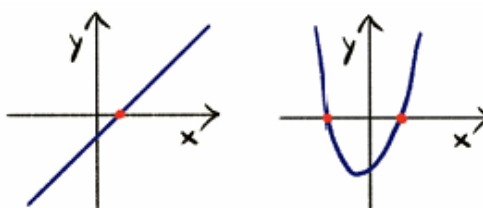
D.  $\frac{7}{2}$

Brudnopis	
$0 = 3x + 6$ $-3x = 6 / :(-3)$ $x = -2$	<p>Najpierw liczymy miejsce zerowe (czyli <math>x</math>) z funkcji <math>f(x)</math>. <math>f(x)</math> to inaczej <math>y</math>, a <math>y</math> w miejscu zerowym jest równy 0.</p> <p>Miejsca zerowe (czyli <math>x</math>) obu funkcji są takie same, więc podstawiamy <math>-2</math> do drugiej funkcji, aby policzyć "a".</p>
$0 = a \cdot (-2) + 7$ $0 = -2a + 7$	$2a = 7 / :2$ $a = \frac{7}{2}$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

- Ok... A przypomnisz mi o co chodzi z tym miejscem zerowym? Wiesz, po wakacjach trochę mi się zapomniało...

- Jasne. Miejsce zerowe to  $x$  punktu, w którym wykres wielomianu przecina oś  $X$ . Na rysunkach miejsca zerowe masz zaznaczone na czerwono.



- Fajnie. Ale w tym zadaniu nie mam żadnego wykresu...

- Nie szkodzi. Miejsce zerowe to  $x$ , dla którego  $y=0$ .



A gdzie ten  $y$ ?

- Brzmi prosto. Tylko ja tu nie widzę żadnego  $y$ .
- Ah.  $W(x)$  to po prostu  $y$ . Tak samo jakbyś miał  $F(x)$  albo  $G(x)$  itd. To wszystko po prostu  $y$ .
- To nie mogli tak od razu...?

Oba fragmenty pochodzą z e-booka Maturalnego Koncentratu z Matmy.

**Zadanie 10. (0–1)**

Funkcja liniowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$ .

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  wykres funkcji  $y = f(x)$  jest prostą nachyloną do osi  $Ox$  pod kątem ostrym  $\alpha$ .

Uzupełnij poniższe zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Sinus kąta  $\alpha$  jest równy ... $\frac{1}{2}$ ....

Brudnopis

$\underline{\underline{tg \alpha = a}}$  → Karta Wzorów strona 53

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\underline{\underline{tg \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$  → Karta Wzorów strona 30  
czyli  $\alpha = 30^\circ$   $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Mam tu na myśli Ulepszoną Kartę Wzorów dołączoną do pakietu Maturalny Koncentrat z Matmy. Oczywiście te wzory znajdują się także w karcie wzorów, którą będziesz mieć ze sobą na maturze.

**Zadanie 11.**

Pusta bańka na mleko o pojemności 10 litrów ma masę 6,5 kg.  
Jeden litr mleka ma masę 1,03 kg.

Niech  $x$  oznacza liczbę litrów mleka w tej bańce, a  $f(x)$  oznacza wyrażoną w kilogramach masę bańki wraz z mlekiem, gdzie  $x \in [0, 10]$ .

**Zadanie 11.1. (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1	Funkcja $f$ jest malejąca.	P	F
2	Funkcja $f$ nie ma miejsc zerowych.	P	F

1 Funkcja jest rosnąca, ponieważ wyraża masę bańki wraz z masą mleka, w zależności od liczby litrów mleka ( $x$ ). Czyli: im więcej litrów mleka (im większy  $x$ ), tym cięższa bańka (większa jej masa - czyli rośnie też  $y$ ).

2 Funkcja nie ma miejsc zerowych, ponieważ  $y$  to masa bańki wraz z mlekiem. Co za tym idzie - nawet jeśli bańka jest pusta to waży 6,5kg (czyli  $y$  nie może być 0).

**Zadanie 11.2. (0-1)**



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największa wartość funkcji  $f$  jest równa

- A. 16,8                      B. 15,8                      C. 11,3                      D. 10,3

Brudnopis														
$10 \cdot 1,03 + 6,5 = 10,3 + 6,5 = 16,8$														

Największa wartość funkcji ( $y$ , inaczej  $f(x)$ ) będzie równa masie maksymalnie napelnionej bańki (masa mleka + bańki). 1 litr mleka waży 1,03 kg. My mamy tu 10 litrów, więc musimy pomnożyć 10 razy 1,03 kg. No i dodać masę bańki.

**Zadanie 11.3. (0–1)**  

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem

A.  $f(x) = 6,5x + 1,03$

B.  $f(x) = 1,03x + 10$

C.  $f(x) = 10x + 1,03$

D.  $f(x) = 1,03x + 6,5$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

$x$  to liczba litrów mleka. Już ustaliliśmy, że każdy litr mleka waży 1,03 kg. Zatem jeśli chcemy policzyć masę np. 4 litrów to musimy 4 pomnożyć przez 1,03 kg. Jeśli więc mamy  $x$  litrów to musimy  $x$  pomnożyć przez 1,03 kg. No i dodać masę bańki (czyli 6,5 kg).

# Funkcja kwadratowa

## Zadanie 14. (0-1)

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f$  jest liczba  $(-5)$ . Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji  $f$ , jest równa  $3$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Drugim miejscem zerowym funkcji  $f$  jest liczba

**A.** 11

**B.** 1

**C.**  $(-1)$

**D.**  $(-13)$

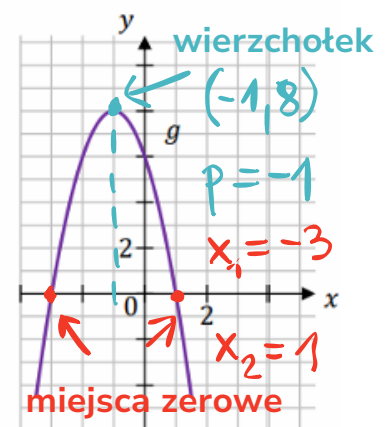
*Brudnopis*

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p \quad x_1 = -5 \quad p = 3$$
$$\frac{-5 + x_2}{2} = 3$$
$$-5 + x_2 = 6$$
$$x_2 = 6 + 5$$
$$x_2 = 11$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Wykres funkcji kwadratowej (parabola) jest symetryczny. To znaczy, że od wierzchołka do pierwszego miejsca zerowego jest taka sama odległość jak od wierzchołka do drugiego miejsca zerowego.

Inaczej mówiąc:  **$x$  wierzchołka** (nazywane  **$p$** , tak dla odróżnienia) **jest średnią miejsc zerowych.**



parabola, czyli wykres funkcji kwadratowej

### Zadanie 15. (0–2)

Funkcje  $A, B, C, D, E$  oraz  $F$  są określone dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wzory tych funkcji podano poniżej.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Przedział  $(-\infty, 2]$  jest zbiorem wartości funkcji ..... **A** ..... oraz ..... **F** .....

A.  $A(x) = -(x - 3)^2 + 2$

B.  $B(x) = x^2 + 2$

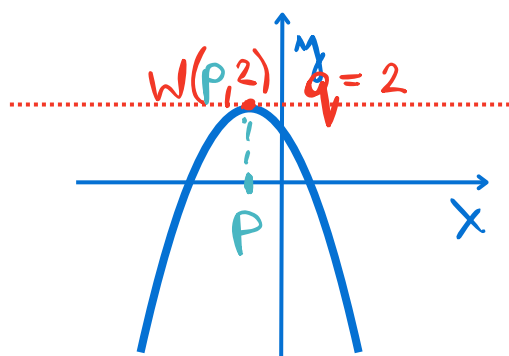
C.  $C(x) = -5(x - 2)^2$

D.  $D(x) = (x - 2)^2$

E.  $E(x) = 2x^2 - 8x + 10$

F.  $F(x) = -2x^2 + 4x$

wartości to igreki (y)  
Zbiór wartości jest od  
minus  
nieskończoności do 2



Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023  
Wykres f. kwadratowej może mieć ramiona do góry lub do dołu. W naszym przykładzie musi mieć ramiona do dołu. Jak odkryć czy ramiona paraboli (wykresu f. kwadratowej) są do dołu czy do góry? Jeśli współczynnik “a” jest na minusie to ramiona są do dołu, jeśli na plusie to do góry (Karta Wzorów, strona 18).

Wzór f. kwadratowej można zapisać w trzech postaciach: ogólnej, kanonicznej (przy pomocy wierzchołka) oraz iloczynowej (przy pomocy miejsc zerowych).

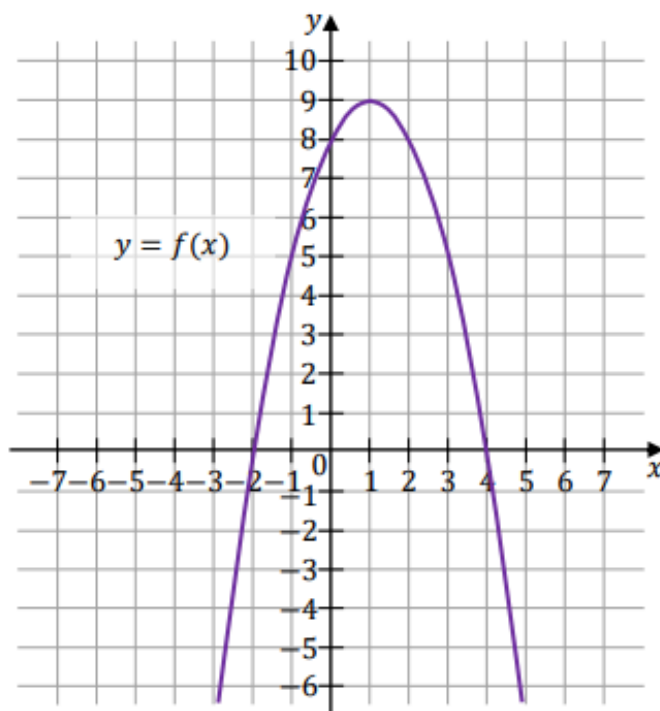
Wzór i opis postaci kanonicznej znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 20. Sprawdź, dzięki temu dowiesz się gdzie szukać “a” w postaci kanonicznej.

W odpowiedzi A, C i D funkcja zapisana jest w postaci kanonicznej. “a” jest na minusie tylko w odpowiedzi A i C, zatem D odrzucamy. Odczytujemy wartość q (czyli y wierzchołka). Tylko A ma  $q=2$ . Zatem odrzucamy C.

Z pozostałych odpowiedzi tylko F ma “a” na minusie. Zatem to musi być druga odpowiedź.

### Zadanie 14.

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej  $f$  (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają obie współrzędne całkowite.



### Zadanie 14.1. (0-1)

Uzupełnij poniższe zdanie. Wpisz odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $f(x) \geq 0$  jest przedział  $\langle -2; 4 \rangle$ .....  
*imaczej  $y \geq 0$*

Czyli  $x$ , dla których  $y$  są większe lub równe zero.

### Zadanie 14.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja kwadratowa  $f$  jest określona wzorem

A.  $f(x) = -(x + 1)^2 - 9$

B.  $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$

C.  $f(x) = -(x - 1)^2 - 9$

D.  $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$

Brudnopis	$W(1, 9)$	W to wierzchołek. Trzeba podstawić go do wzoru postaci kanonicznej (Karta Wzorów, strona 20).

**Zadanie 14.3. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla funkcji  $f$  prawdziwa jest równość

**A.**  $f(-4) = f(6)$

**B.**  $f(-4) = f(5)$

**C.**  $f(-4) = f(4)$

**D.**  $f(-4) = f(7)$

*chodzi o x,  
bo f(x)*

Parabola jest symetryczna. Pierwsza współrzędna wierzchołka ( $x$ , nazywany dla wierzchołka  $p$ ) jest równa 1. -4 znajduje się pięć kratek od 1. W drugą stronę pięć kraterk od jedynki jest 6.

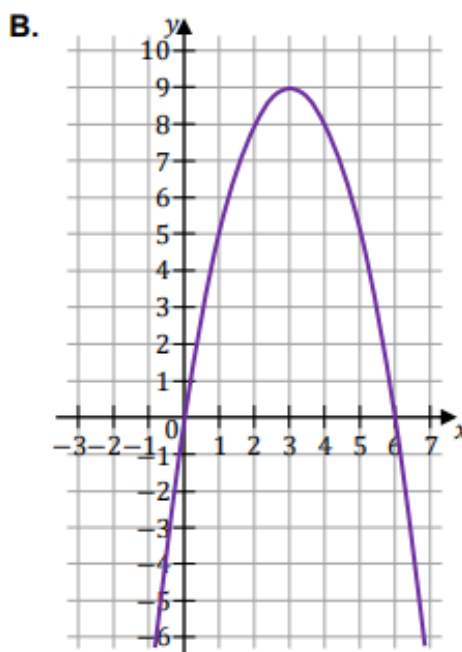
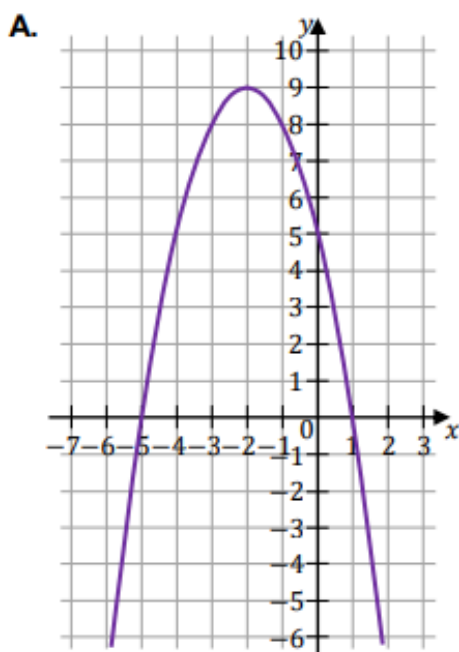
**Zadanie 14.4. (0-2)**

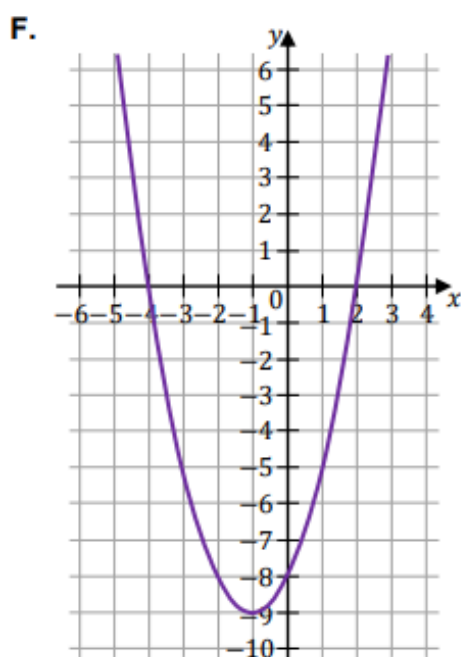
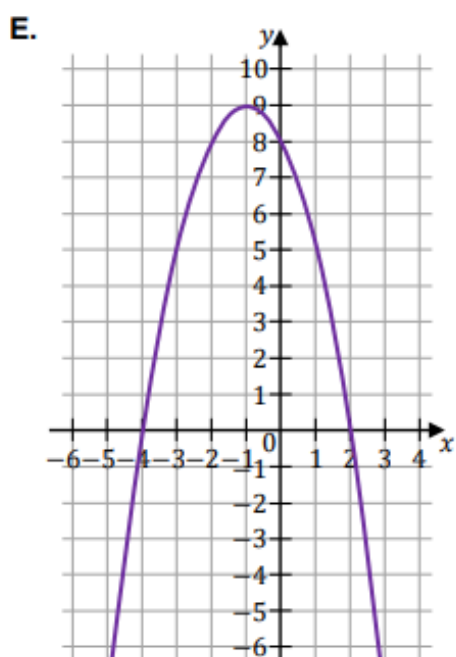
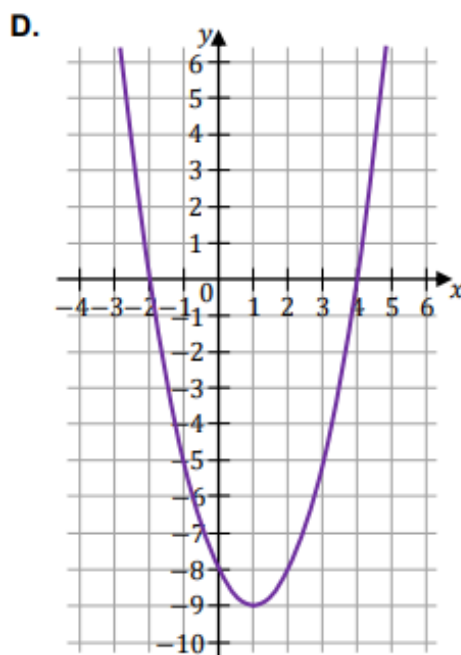
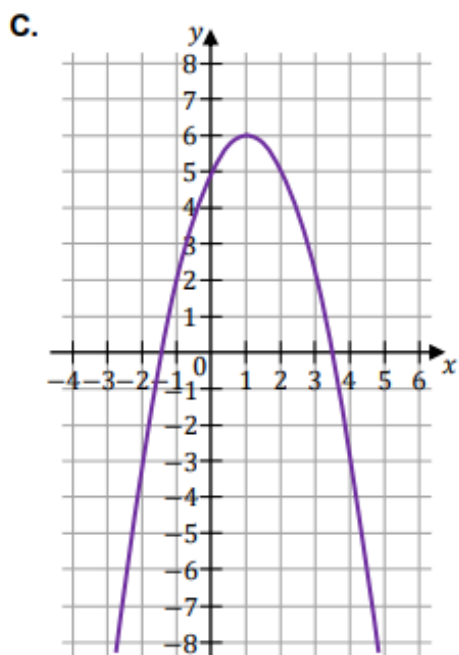
Funkcje kwadratowe  $g$  oraz  $h$  są określone za pomocą funkcji  $f$  (zobacz rysunek na stronie 13) następująco:  $g(x) = f(x + 3)$ ,  $h(x) = f(-x)$ .

Na rysunkach A-F przedstawiono, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , fragmenty wykresów różnych funkcji – w tym fragment wykresu funkcji  $g$  oraz fragment wykresu funkcji  $h$ .

Uzupełnij tabelę. Każdej z funkcji  $g$  oraz  $h$  przyporządkuj fragment jej wykresu. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A-F.

Fragment wykresu funkcji $y = g(x)$ przedstawiono na rysunku	<b>A</b>
Fragment wykresu funkcji $y = h(x)$ przedstawiono na rysunku	<b>E</b>





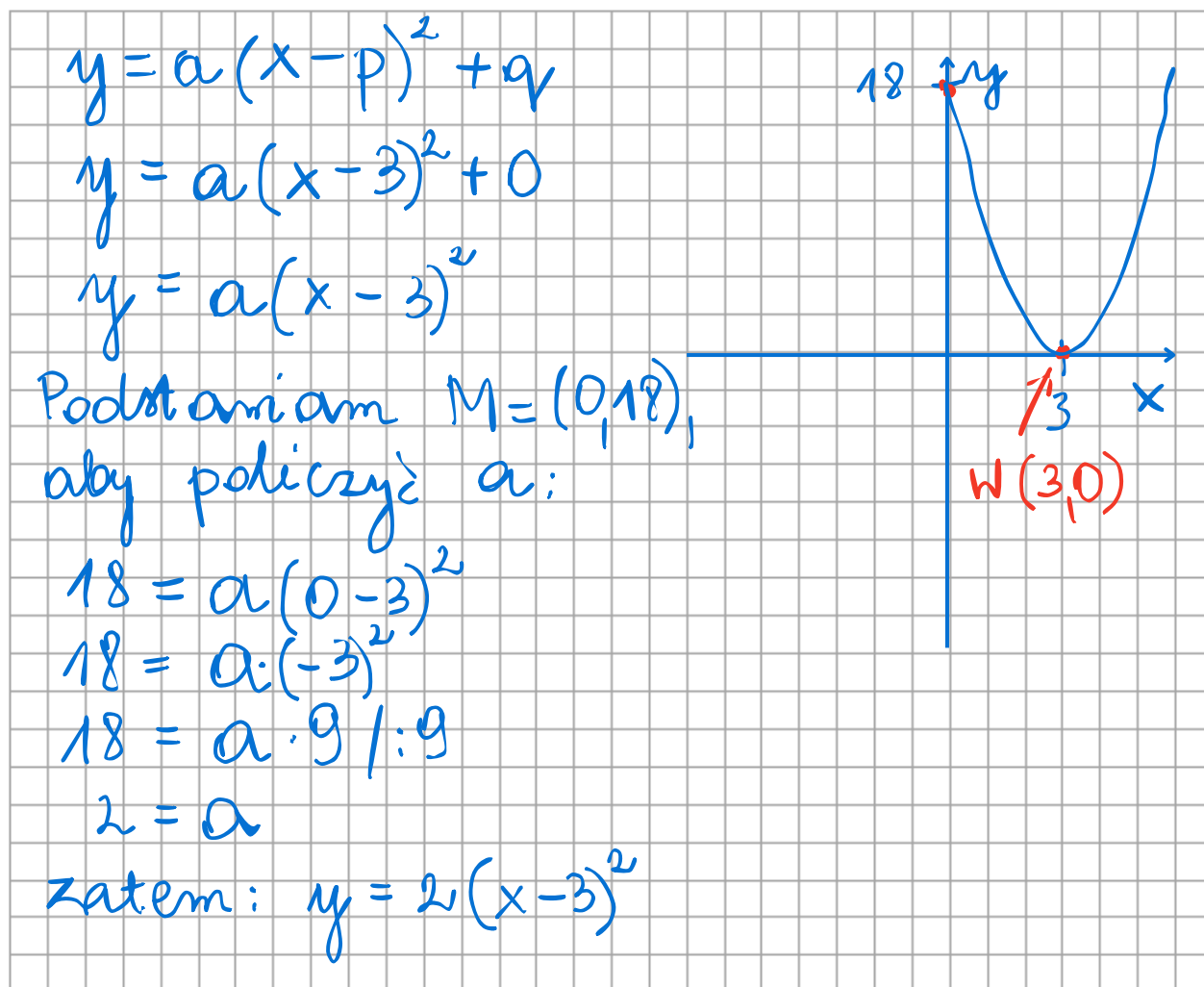
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Przesuwanie wykresu wyjaśniłam na stronie 34 w bliźniaczym zadaniu 10 w e-booku z (tak, tak, zgadł\_ś) Maturalnego Koncentratu z Matmy.

**Zadanie 14. (0-2)**

Parabola, która jest wykresem funkcji kwadratowej  $f$ , ma z osiami kartezjańskiego układu współrzędnych  $(x, y)$  dokładnie dwa punkty wspólne:  $M = (0, 18)$  oraz  $N = (3, 0)$ .

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$ . Zapisz obliczenia.



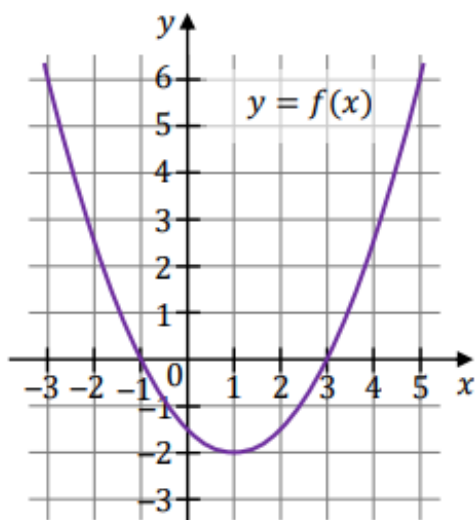
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Z racji, że te dwa punkty podane w zadaniu to JEDYNE punkty, w których wykres przecina się z osiami to wykres musi wyglądać jak ten powyżej. To oznacza, że punkt  $(3, 0)$  musi być wierzchołkiem paraboli (tak, miejsce zerowe może należeć do wierzchołka - wtedy mamy tylko jedno miejsce zerowe).

Skoro mamy wierzchołek to korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną (Karta Wzorów, strona 20). Potem już tylko podstawiamy drugi znany punkt, aby policzyć "a".

### Zadanie 12.

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej  $f$  (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli oraz punkty przecięcia paraboli z osią  $Ox$  układu współrzędnych mają obie współrzędne całkowite.



### Zadanie 12.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział

A.  $(-\infty, -2]$

B.  $[1, +\infty)$

C.  $[-1, 3]$

D.  $[-2, +\infty)$

Brudnopis

Zbiór wartości to "igrek" ( $y$ ).

### Zadanie 12.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ośią symetrii wykresu funkcji  $f$  jest prosta o równaniu

A.  $x = 1$



B.  $y = 1$

C.  $x = -2$

D.  $y = -2$

Brudnopis

Oś symetrii to p mierzchołka.  
A p to x.

**Zadanie 12.3. (0-1)**  

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja  $f$  jest określona wzorem

A.  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$

B.  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$

C.  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$

D.  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Odczytaj z wykresu współrzędne wierzchołka  $(1, -2)$ , a następnie skorzystaj ze wzoru na postać kanoniczną (Karta Wzorów, strona 20), aby podstawić  $p$  i  $q$  do wzoru.

# Ciąg arytmetyczny

## Zadanie 17. (0-2)

Pan Stanisław spłacił pożyczkę w wysokości 8910 zł w osiemnastu ratach. Każda kolejna rata była mniejsza od poprzedniej o 30 zł.

Oblicz kwotę pierwszej raty. Zapisz obliczenia.

The image shows a handwritten solution on a grid background. At the top, the variables are defined:  $a_1 = ?$ ,  $r = -30$ , and  $S_{18} = 8910$  (circled in red). The formula for the sum of an arithmetic sequence is written as  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ . This formula is then applied to the problem:  $S_{18} = \frac{2 \cdot a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18$ . The  $S_{18}$  is circled in red, and an arrow points from this equation to the text on the right: "Wzór na sumę ciągu arytmetycznego znajdziesz w Karcie Wzorów na stronie 24." Below this, the equation is simplified:  $8910 = \frac{2a_1 - 510}{2} \cdot 18$ . The  $18$  in the denominator is crossed out, and the  $18$  in the numerator is written as  $9$ . This leads to  $8910 = (2a_1 - 510) \cdot 9$ , then  $8910 = 18a_1 - 4590$ , then  $8910 + 4590 = 18a_1$ , then  $13500 = 18a_1$ , and finally  $750 = a_1$  (underlined).

$$a_1 = ? \quad r = -30 \quad S_{18} = 8910$$
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Wzór na sumę ciągu arytmetycznego znajdziesz w Karcie Wzorów na stronie 24.

$$S_{18} = \frac{2 \cdot a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18$$
$$8910 = \frac{2a_1 - 510}{2} \cdot 18$$
$$8910 = (2a_1 - 510) \cdot 9$$
$$8910 = 18a_1 - 4590$$
$$8910 + 4590 = 18a_1$$
$$13500 = 18a_1$$
$$\underline{750 = a_1}$$

**Zadanie 18. (0–2)**

Ciąg  $(3x^2 + 5x, x^2, 20 - x^2)$  jest arytmetyczny.

Oblicz  $x$ . Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{3x^2 + 5x + 20 - x^2}{2} \quad | \cdot 2 \\2x^2 &= 3x^2 + 5x + 20 - x^2 \\0 &= 3x^2 + 5x + 20 - x^2 - 2x^2 \\0 &= 5x + 20 \\-20 &= 5x \quad | :5 \\-4 &= x\end{aligned}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

W ciągu arytmetycznym dowolny wyraz (oprócz pierwszego i ostatniego) to średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wyrazów (tych “po bokach”).

Wzór znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 24.

**Zadanie 17. (0-2)**

Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  jest określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Trzeci wyraz tego ciągu jest równy  $(-1)$ , a suma piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa  $(-165)$ .

Oblicz różnicę tego ciągu. Zapisz obliczenia.

The image shows a handwritten solution on a grid background. At the top, the given conditions are circled in red and green:  $a_3 = -1$  and  $S_{15} = -165$ . The general term formula  $a_n = a_1 + (n-1)r$  is written, with an arrow pointing to a note: "Wzór na wyraz ogólny (na dowolny wyraz oprócz pierwszego) ciągu arytmetycznego znajdziesz w Karcie Wzorów na stronie 23." The value of  $r$  is written as  $r = ?$ . The third term is substituted into the formula:  $a_3 = a_1 + (3-1)r$ . This leads to the equation  $-1 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = -2r - 1$ . The sum formula  $S_{15} = \frac{2a_1 + (15-1)r}{2} \cdot 15$  is used, with  $S_{15}$  circled in green. Substituting  $a_1$  gives  $-165 = \frac{2(-2r-1) + 14r}{2} \cdot 15$ . The fraction is simplified to  $-165 = \frac{2(-2r-1) + 14r}{2} \cdot 15$ . This is further simplified to  $-165 = (a_1 + 7r) \cdot 15$ . On the right side, the equation  $-11 + 1 = 7r - 2r$  is written, leading to  $-10 = 5r$ , which is divided by 5 to get  $-2 = r$ . The final result  $-2 = r$  is underlined twice. The final steps on the left are  $-165 = 15a_1 + 105r$ ,  $-165 - 105r = 15a_1$ ,  $-11 - 7r = a_1$ , and  $-11 - 7r = -2r - 1$ .

**Zadanie 15. (0-1)**

Trzywyrazowy ciąg  $(2m - 5, 4, 9)$  jest arytmetyczny.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Ten ciąg jest

A.	rosnący	oraz	1.	$m = -1$
			2.	$m = 2$
B.	malejący		3.	$m = 3$

*Brudnopis*

$$4 = \frac{2m - 5 + 9}{2} \quad | \cdot 2$$
$$8 = 2m - 5 + 9$$
$$8 = 2m + 4$$
$$8 - 4 = 2m$$
$$4 = 2m \quad | : 2$$
$$2 = m$$


Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Jeśli masz podane trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego to jest prawie pewne, że musisz użyć wzoru na sąsiednie wyrazy w ciągu arytmetycznym (środkowy to średnia sąsiadujących).

Wzór jest w Karcie Wzorów na stronie 24.

Ciąg jest rosnący, ponieważ drugi wyraz jest równy 4, a trzeci wyraz jest równy 9. Oznacza to, że kolejne wyrazy są coraz większe, czyli "rosną".

# Ciąg geometryczny

Zadanie 16. (0–1) 

Trzywyrazowy ciąg  $(27, 9, a - 1)$  jest geometryczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $a$  jest równa

A. 3

B. 0

C. 4

D. 2

Brudnopis

$$9^2 = 27 \cdot (a - 1)$$

$$81 = 27a - 27$$

$$81 + 27 = 27a$$

$$108 = 27a \quad | :27$$

$$4 = a$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Ciąg geometryczny też ma swój wzór na sąsiadujące wyrazy. Środkowy wyraz podniesiony do kwadratu jest równy iloczynowi (pomnożeniu) wyrazów sąsiadujących. Wzór wraz z przykładem znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 26.

**Zadanie 17. (0–1)**

Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$ , określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 128, natomiast iloraz ciągu jest równy  $(-\frac{1}{2})$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wyraz $a_{2023}$ jest liczbą ujemną.	P	<input checked="" type="radio"/> F
Różnica $a_3 - a_2$ jest równa 96.	<input checked="" type="radio"/> P	F

*Brdnopis*

$$a_1 = 128 \quad q = -\frac{1}{2}$$

Kolejne wyrazy:

$$a_2 = 128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -64$$
$$a_3 = -64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 32$$
$$a_4 = 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -16 \text{ itd.}$$
$$a_3 - a_2 = 32 - (-64) = 32 + 64 = 96$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Zauważ, że co drugi wyraz jest ujemny. Każdy nieparzysty wyraz jest na plusie (pierwszy, trzeci itd.), a parzyste na minusie (drugi, czwarty itd.). Zatem wyraz o numerze 2023 (nieparzystym) będzie na plusie (dodatni).

**Zadanie 18. (0-1)**

Trzywyrazowy ciąg  $(-1, 2, x)$  jest arytmetyczny.

Trzywyrazowy ciąg  $(-1, 2, y)$  jest geometryczny.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczby  $x$  oraz  $y$  spełniają warunki

A.  $x > 0$  i  $y > 0$

B.  $x > 0$  i  $y < 0$

C.  $x < 0$  i  $y > 0$

D.  $x < 0$  i  $y < 0$

*Brudnopis*

$$2 = \frac{-1+x}{2} \quad | \cdot 2$$

$$4 = -1 + x$$

$$4 + 1 = x$$

$$5 = x$$

$$2^2 = -1 \cdot y$$

$$4 = -y \quad | \cdot (-1)$$

$$-4 = y$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Trzeba użyć wzorów z sąsiadującymi wyrazami, zarówno dla arytmetycznego, jak i dla geometrycznego ciągu.

**Zadanie 14. (0-1)**

Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , w którym  $a_2 = 2$  oraz  $a_5 = 54$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz ciągu  $(a_n)$  jest równy

A. 3

B. 9

C.  $\frac{52}{3}$

D. 27

Brudnopis

$$q = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$54 = \frac{2q^4}{q^1}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$54 = 2q^{4-1}$$

$$54 = 2q^3 \quad | :2$$

$$2 = a_1 \cdot q \quad | :q$$

$$54 = a_1 \cdot q^4$$

$$27 = q^3 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$\frac{2}{q} = a_1$$

$$54 = \frac{2}{q} \cdot q^4$$


$$3 = q$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego (można nim policzyć dowolny wyraz ciągu oprócz pierwszego) znajdziesz na stronie 25 w Karcie Wzorów.

# Dzień 4: Geometria płaska i trygonometria

## Funkcje trygonometryczne

Zadanie 19. (0–1) 

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta  $\alpha$  jest równy

A.  $\frac{24}{49}$

B.  $\frac{5}{7}$

C.  $\frac{25}{49}$

D.  $\frac{\sqrt{6}}{7}$


*Brudnopis*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7} / ( )^2$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{4 \cdot 6}{49}$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{24}{49}$$
$$\sin^2 \alpha + \frac{24}{49} = 1$$
$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{24}{49}$$
$$\sin^2 \alpha = \frac{25}{49} / \sqrt{ }$$
$$\sin \alpha = \frac{5}{7}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Jak z cosinusa jakiegoś kąta obliczyć jego sinus? Jedyneką trygonometryczną. Pamiętaj tylko, że w jedynce trygonometrycznej zarówno sinus, jak i cosinus są podniesione do kwadratu. Oznacza to, że zanim podstawisz cosinus musisz go podnieść do kwadratu (tak jak ja to zrobiłam na początku tego zadania).

“Jedynka trygonometryczna” znajduje się oczywiście w Karcie Wzorów (strona 30).

Zadanie 19. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdego kąta ostrego  $\alpha$  wyrażenie  $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$  jest równe

- A.  $\sin^2 \alpha$                       B.  $\sin^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$   
C.  $\sin^4 \alpha + 1$                       D.  $\sin^2 \alpha \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)$

Brudnopis

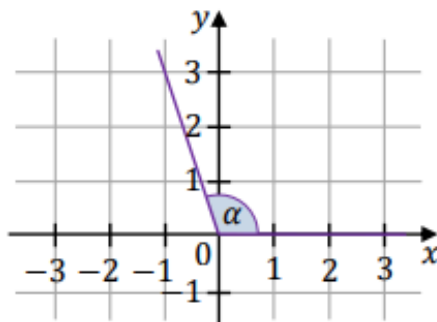
$$\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) =$$
$$= \sin^2 \alpha \cdot 1 = \sin^2 \alpha$$

*jedynka trygonometryczna*

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

**Zadanie 18. (0–2)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  zaznaczono kąt o mierze  $\alpha$  taki, że  $\operatorname{tg} \alpha = -3$  oraz  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  (zobacz rysunek).



Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Prawdziwe są zależności: .....**B**..... oraz .....**F**..... .

A.  $\sin \alpha < 0$

B.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

C.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

D.  $\cos \alpha > 0$

E.  $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \cos \alpha$

F.  $\sin \alpha = -3 \cos \alpha$


<i>Brudnopis</i>	
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$-3 \cos \alpha = \sin \alpha$
$-3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha$	

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Kąt znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, a drugiej ćwiartce tylko sinus jest dodatni.

Ćwiartki krok po kroku opisałam w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy (strona 68, zadanie 16).

“Wzór” na tangens alfa (że to sinus przez cosinus) znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 30.

Zadanie 19. (0-1) 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba  $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ$  jest równa

A.  $\cos 20^\circ$

B.  $\sin 20^\circ$

C.  $\operatorname{tg} 20^\circ$

D.  $\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$

Brudnopis

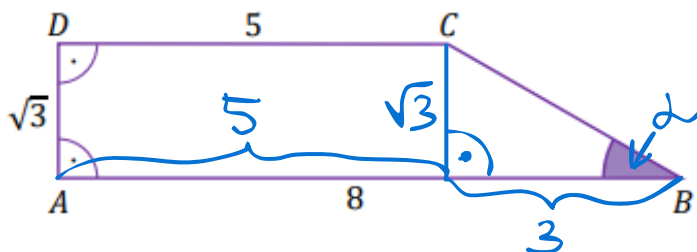
$$\begin{aligned} \sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ &= \sin 20^\circ (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) = \\ &= \sin 20^\circ \cdot 1 = \sin 20^\circ \end{aligned}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 20. (0–1)**

Podstawy trapezu prostokątnego  $ABCD$  mają długości:  $|AB| = 8$  oraz  $|CD| = 5$ .  
Wysokość  $AD$  tego trapezu ma długość  $\sqrt{3}$  (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego  $ABC$  jest równa

A.  $15^\circ$

B.  $30^\circ$

C.  $45^\circ$

D.  $60^\circ$

Brudnopis

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Skorzystałam z funkcji trygonometrycznych dla trójkąta prostokątnego (Karta Wzorów, strona 28). Mieliśmy akurat odpowiednie boki, aby policzyć tangens.

A następnie odczytałam z tabeli na stronie 30 dla jakiego kąta tangens jest równy pierwiastkowi z trzech przez trzy.

# Twierdzenie cosinusów

Zadanie 18. (0-1)

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $|AB| = 5$ ,  $|AC| = 2$  oraz  $\cos \sphericalangle BAC = \frac{3}{5}$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość boku  $BC$  tego trójkąta jest równa

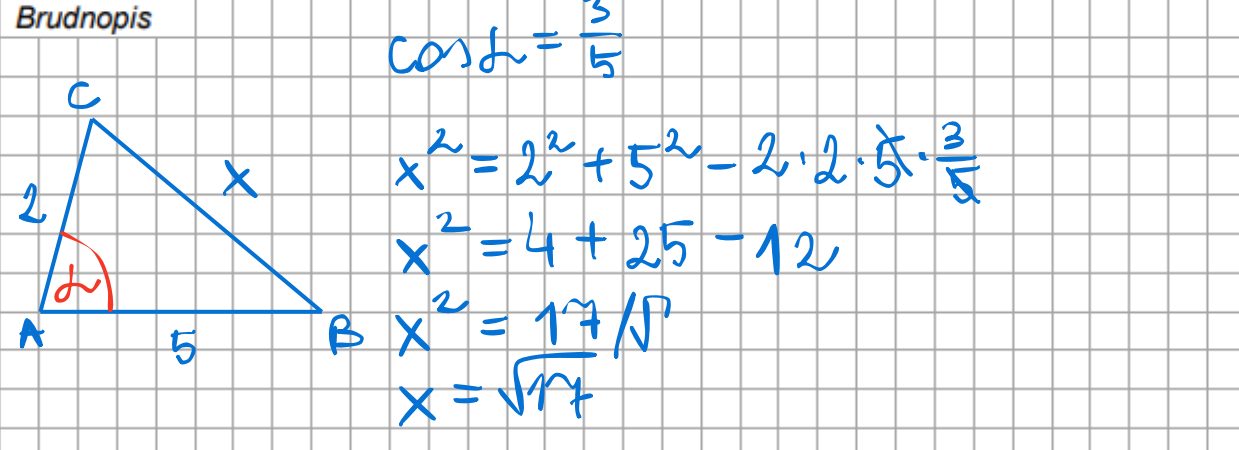
A.  $\sqrt{17}$

B.  $\sqrt{23}$

C.  $\sqrt{35}$

D.  $\sqrt{41}$

Brudnopis



$\cos \sphericalangle = \frac{3}{5}$

$$x^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$
$$x^2 = 4 + 25 - 12$$
$$x^2 = 17 \sqrt{}$$
$$x = \sqrt{17}$$

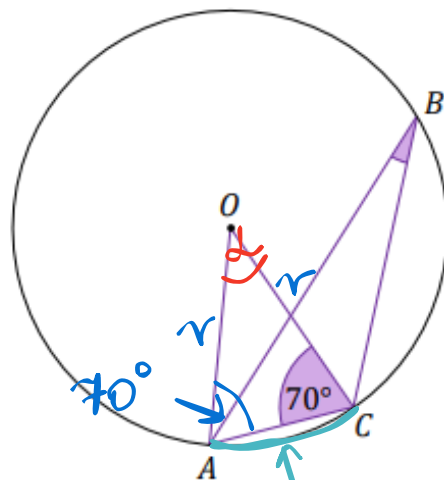
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Twierdzenie cosinusów, to jak i kiedy go używać, opisałam szczegółowo i z przykładami w Karcie Wzorów na stronie 34. Oczywiście znajduje się to twierdzenie również w zwykłej karcie wzorów, którą będziesz mieć na maturze.

# Kąty w okręgu

## Zadanie 21. (0–1)

Punkty  $A, B, C$  leżą na okręgu o środku w punkcie  $O$ .  
Kąt  $ACO$  ma miarę  $70^\circ$  (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego  $ABC$  jest równa

A.  $10^\circ$

B.  $20^\circ$

C.  $35^\circ$

D.  $40^\circ$

łuk, na którym oparty jest kąt alfa i szukany

Brudnopis

$$70^\circ + 70^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 140^\circ$$

$$140^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 40^\circ$$

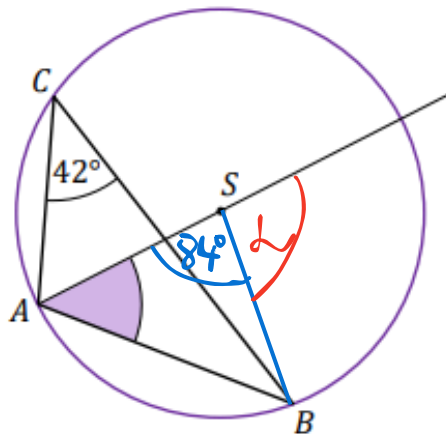
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Trójkąt  $ACO$  jest równoramienny, ponieważ dwa z jego boków są promieniami okręgu. Zatem drugi kąt też jest równy  $70^\circ$ . Suma miar wszystkich kątów w trójkącie (czyli wszystkie kąty po dodaniu) wynosi zawsze  $180^\circ$ . Zatem kąt alfa (przy punkcie  $O$ ) jest równy  $40^\circ$ .

Wiemy, że **kąt środkowy** (alfa) **jest dwa razy większy od kąta wpisanego** (w naszym przypadku tego, którego szukamy) **opartego na tym samym łuku**. I to też jest w Karcie Wzorów! Strona 45.

**Zadanie 22. (0-1)**

W trójkącie  $ABC$ , wpisanym w okrąg o środku w punkcie  $S$ , kąt  $ACB$  ma miarę  $42^\circ$  (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego  $BAS$  jest równa

A.  $42^\circ$

B.  $45^\circ$

C.  $48^\circ$

D.  $69^\circ$

*Brudnopis*

$$\alpha + 84^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 96^\circ$$

$$\frac{96^\circ}{2} = 48^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 84^\circ$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

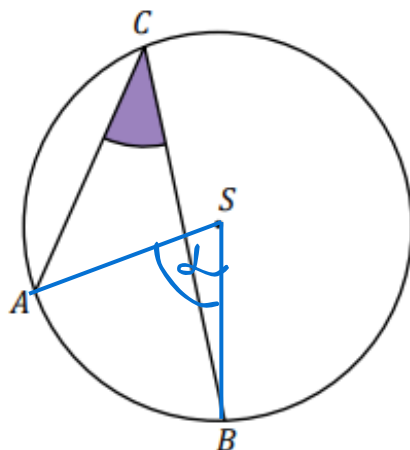
Aby policzyć kąt  $84^\circ$  skorzystałam z tego, że jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt  $42^\circ$ .

Wiem, że kąt  $84^\circ$  i kąt  $\alpha$  to kąty przyległe - tworzą razem kąt o mierze  $180^\circ$ . Rodzaje kątów opisałam (i narysowałam) w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy na stronie 15, w zadaniu 5.

Następnie skorzystałam z tego, że  $\alpha$  jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co szukany przez nas kąt wpisany.

**Zadanie 21. (0-1)**

Punkty  $A$ ,  $B$  oraz  $C$  leżą na okręgu o środku w punkcie  $S$ . Długość łuku  $AB$ , na którym jest oparty kąt wpisany  $ACB$ , jest równa  $\frac{1}{5}$  długości okręgu (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego  $ACB$  jest równa

A.  $18^\circ$

B.  $30^\circ$

C.  $36^\circ$

D.  $72^\circ$

*Brudnopis*

$$\text{Obw} = 2\pi r$$

Długość łuku (wzór):

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Długość łuku nr zad.::

$$L = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r$$

$$\frac{1}{5} 2\pi r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad / : 2\pi r$$

$$\frac{1}{5} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad / \cdot 360^\circ$$

$$\frac{360^\circ}{5} = \alpha$$

$$72^\circ = \alpha$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Kąt środkowy może wyznaczać wycinek koła. Wzór na długość łuku wycinka znajduje się na stronie 44 Karty Wzorów.

# Pola i obwody figur

## Zadanie 20. (0–1)

W rombie o boku długości  $6\sqrt{2}$  kąt rozwarty ma miarę  $150^\circ$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn długości przekątnych tego rombu jest równy

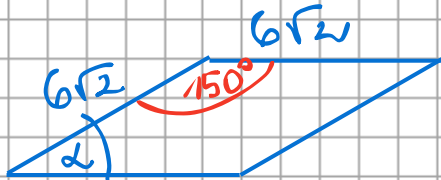
A. 24

B. 72

C. 36

D.  $36\sqrt{2}$

Brudnopis



$150^\circ + \alpha = 180^\circ$   
 $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$P = (6\sqrt{2})^2 \cdot \sin 30^\circ = 36 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 36$

$36 = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \quad | \cdot 2 \quad \underline{72 = d_1 \cdot d_2}$

$P = a^2 \cdot \sin \alpha$   
 $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Nie wiesz co zrobić? Patrz we wzory. O rombie mamy fragment w Karcie Wzorów na stronie 50. Możemy policzyć jego pole zarówno przy użyciu boku i kąta ostrego, jak i przy użyciu przekątnych.

Dlatego policzyłam najpierw kąt ostry, a potem pole ze wzoru z bokiem i sinusem kąta ostrego. A następnie użyłam wzoru z przekątnymi.

**Zadanie 21. (0–1)**

Koło ma promień równy 3.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Obwód wycinka tego koła o kącie środkowym  $30^\circ$  jest równy

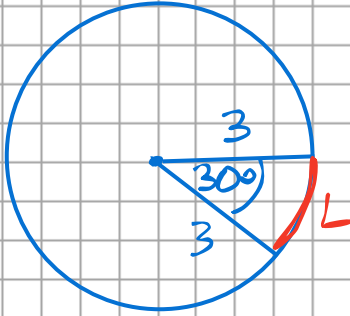
A.  $\frac{3}{4}\pi$

B.  $\frac{1}{2}\pi$

C.  $\frac{3}{4}\pi + 6$

D.  $\frac{1}{2}\pi + 6$

Brudnopis



$L = \frac{30}{360} \cdot 2\pi \cdot 3$

$L = \frac{1}{12} \cdot 6\pi$

$L = \frac{1}{2}\pi$

$L = \frac{1}{2}\pi$

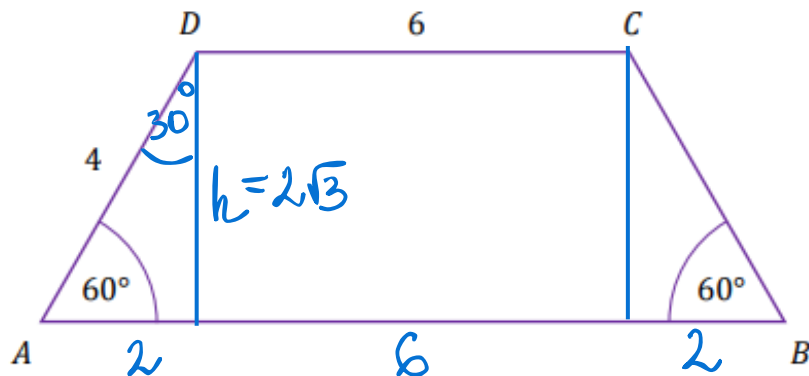
Obw =  $3 + 3 + \frac{1}{2}\pi$

Obw =  $6 + \frac{1}{2}\pi$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

**Zadanie 24. (0–2)**

Dany jest trapez równoramienny  $ABCD$ , w którym podstawa  $CD$  ma długość 6, ramię  $AD$  ma długość 4, a kąty  $BAD$  oraz  $ABC$  mają miarę  $60^\circ$  (zobacz rysunek).



Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

$$a = 6 \quad b = 10 \quad h = 2\sqrt{3}$$
$$P = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 8 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

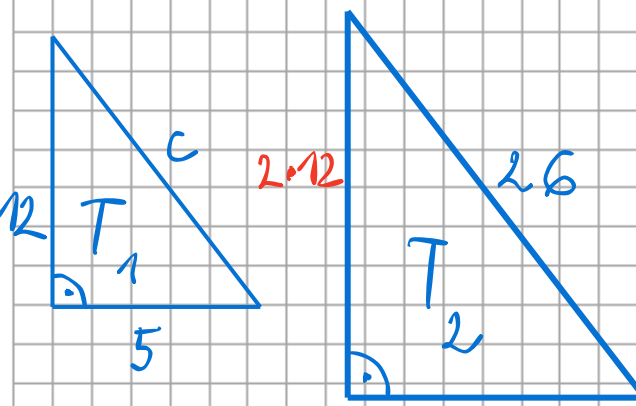
Aby policzyć długości boków w trójkącie utworzonym przez dorysowanie wysokości, skorzystałam z własności trójkąta  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Tego nie ma we wzorach, ale możesz spokojnie skorzystać z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Przykład jak to policzyć znajduje się w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy na stronie 106.

# Figury podobne

## Zadanie 22. (0-2)

Trójkąty prostokątne  $T_1$  i  $T_2$  są podobne. Przyprostokątne trójkąta  $T_1$  mają długości 5 i 12. Przeciwprostokątna trójkąta  $T_2$  ma długość 26.

Oblicz pole trójkąta  $T_2$ . Zapisz obliczenia.



$12^2 + 5^2 = c^2$  2·12

$144 + 25 = c^2$

$169 = c^2 / \sqrt{\quad}$  2·5

$13 = c$

Zatem długości boków  $T_2$  są 2 razy większe.

$a = 10 \quad h = 24$

$P = \frac{10 \cdot 24}{2} = \frac{240}{2} = 120$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Więcej o figurach podobnych jest w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy na stronie 90, w zadaniu 23.

# Twierdzenie dwusiecznej

## Zadanie 23. (0–1)

W trójkącie  $ABC$  długość boku  $AC$  jest równa 3, a długość boku  $BC$  jest równa 4. Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek  $|AD| : |DB|$  jest równy

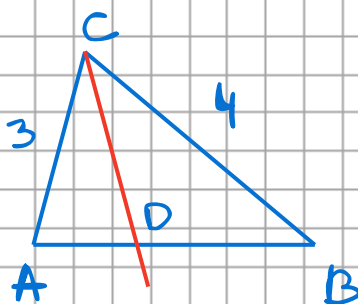
A. 4 : 3

B. 4 : 7

C. 3 : 4

D. 3 : 7

Brudnopis


$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$
$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{3}{4} = 3:4$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Twierdzenie o dwusiecznej kąta znajduje się na 43 stronie w Karcie Wzorów. Oczywiście razem z przykładem.

# Dzień 5: Geometria analityczna i przestrzenna

## Proste prostopadłe i równoległe

### Zadanie 23. (0-1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dane są proste  $k$  oraz  $l$  o równaniach

$$k: y = \frac{2}{3}x$$

$$l: y = -\frac{3}{2}x + 13$$

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Proste  $k$  oraz  $l$

A. są prostopadłe	i przecinają się w punkcie $P$ o współrzędnych	1.	$(-6, -4)$
		2.	$(6, 4)$
B. nie są prostopadłe		3.	$(-6, 4)$

Brudnopis

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = -\frac{3}{2}x + 13 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}x = -\frac{3}{2}x + 13$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x = 13$$

$$\frac{4}{6}x + \frac{9}{6}x = 13$$

$$\frac{13}{6}x = 13 \quad | : \frac{13}{6}$$

$$x = 13 : \frac{13}{6}$$

$$x = 13 \cdot \frac{6}{13}$$

$$x = 6$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023



**Zadanie 23. (0–1)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  proste  $k$  oraz  $l$  są określone równaniami

$$k: y = (m + 1)x + 7$$

$$l: y = -2x + 7$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste  $k$  oraz  $l$  są prostopadłe, gdy liczba  $m$  jest równa

A.  $(-\frac{1}{2})$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $(-3)$

D. 1

*Brudnopis*

$$m + 1 = \frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} - 1$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 22. (0-1)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  proste  $k$  oraz  $l$  są określone równaniami

$$k: y = (3m - 2)x - 2$$

$$l: y = (2m + 4)x + 2$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste  $k$  oraz  $l$  są równoległe, gdy liczba  $m$  jest równa

A.  $(-6)$

B.  $(-2)$

C. 2

D. 6

Brudnopis

$$3m - 2 = 2m + 4$$

$$3m - 2m = 4 + 2$$

$$m = 6$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

# Równanie okręgu

## Zadanie 23.

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dany jest okrąg  $O$  o równaniu

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$$

## Zadanie 23.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Do okręgu $O$ należy punkt o współrzędnych $(-1, -3)$ .	<input checked="" type="radio"/> P	<input type="radio"/> F
Promień okręgu $O$ jest równy 5.	<input type="radio"/> P	<input checked="" type="radio"/> F

*Brudnopis* Podstawiam punkt  $(-1, -3)$ :

$$(-1 - 1)^2 + (-3 + 2)^2 = 5$$
$$(-2)^2 + (-1)^2 = 5$$
$$4 + 1 = 5 \checkmark$$

$5 = r^2$ , więc  $r = \sqrt{5}$

Ta informacja jest w Karcie Wzorów na stronie 56.

## Zadanie 23.2. (0-1)

Okrąg  $K$  jest obrazem okręgu  $O$  w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg  $K$  jest określony równaniem

A.  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

B.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

C.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

D.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

*Brudnopis*

Okrąg  $O$  ma środek w punkcie  $(1, -2)$   
Okrąg  $K$  ma środek w punkcie  $(-1, 2)$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024  
Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych jest opisana w Karcie Wzorów na stronie 58.

**Zadanie 23. (0-1)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  odcinek o końcach  $A = (-4, 7)$  oraz  $B = (6, -1)$  jest średnicą okręgu  $O$ .

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Okrąg  $O$  jest określony równaniem

- A.  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 41$
- B.  $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 41$
- C.  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 41$
- D.  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 41$

Brudnopis

Środek średnicy jest środkiem okręgu:  $O = \left( \frac{-4+6}{2}, \frac{7+(-1)}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{6}{2} \right) = (1, 3)$

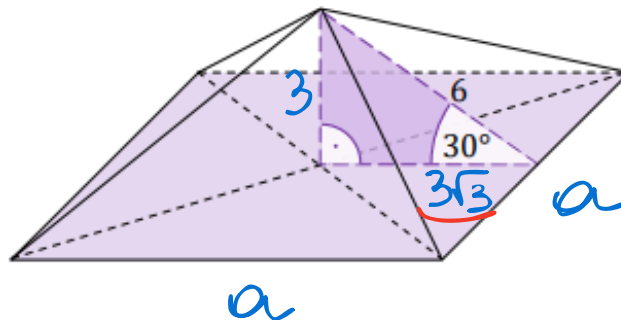
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

Obliczyliśmy współrzędne środka odcinka (średnicy). Wzór znajduje się na stronie 53 Karty Wzorów.

# Ostrosłupy

## Zadanie 26. (0-4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$  i ma długość równą 6 (zobacz rysunek).



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H \quad H = 3 \quad a = 2 \cdot \underline{3\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$P_p = 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 108$$

$$V = 108 \cdot 3 = 324$$


$$P_c = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overset{3}{6\sqrt{3}} \cdot 6 + 108 = 72\sqrt{3} + 108$$

↑  
4  
ściany boczne

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Wzór na objętość ostrosłupa znajduje się na stronie 61.

Pole powierzchni całkowitej to pola wszystkich ścian dodane do siebie.

**Zadanie 27. (0–1)** 

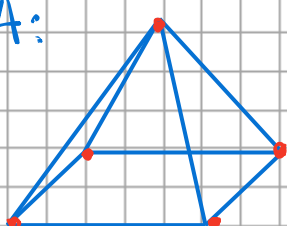
W pewnym ostrosłupie prawidłowym stosunek liczby  $W$  wszystkich wierzchołków do liczby  $K$  wszystkich krawędzi jest równy  $\frac{W}{K} = \frac{3}{5}$ .

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Podstawą tego ostrosłupa jest

- A. kwadrat. B.  pięciokąt foremny.  
C. sześciokąt foremny. D. siedmiokąt foremny.

*Brudnopis*

A: 

$\frac{W}{K} = \frac{5}{8}$

B:  $W = 6$   
 $K = 10$   
 $\frac{W}{K} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

O tym co znaczy “prawidłowy” jeśli chodzi o ostrosłupy i graniastostupy wyjaśniłam w Game Changerze na stronie 110 e-booka Maturalnego Koncentratu z Matmy.

**Zadanie 26. (0–1)**

Ostrosłup  $F_1$  jest podobny do ostrosłupa  $F_2$ .

Objętość ostrosłupa  $F_1$  jest równa 64.

Objętość ostrosłupa  $F_2$  jest równa 512.

**Uzupełnij poniższe zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.**

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa  $F_2$  do pola powierzchni całkowitej

ostrosłupa  $F_1$  jest równy .....<sup>4</sup>.....

Brudnopis	
$\frac{\sqrt{F_2}}{\sqrt{F_1}} = \frac{512}{64} = k^3 /$	
$8 = k^3 \quad k = 2$	
$\text{Stosunek pól to } k^2 \rightarrow k^2 = 4$	

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Skala podobieństwa boków/obwodów to  $k$ , skala podobieństwa pól to  $k^2$ , a objętości  $k^3$ .



# Gnaniastostupy

## Zadanie 25. (0-1)

Dany jest gnaniastostup prawidowy czworokatny, w ktorym krawedz podstawy ma dlugosc 15. Przekatna gnaniastostupa jest nachylona do plaszczyzny podstawy pod katem  $\alpha$  takim, ze  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Dokoncz zdanie. Wybierz wlasciwa odpowiedz spostród podanych.

Dlugosc przekatnej tego gnaniastostupa jest rowna

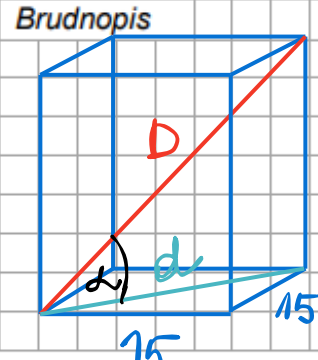
A.  $15\sqrt{2}$

B. 45

C.  $5\sqrt{2}$

D. 10

Brudnopis


$$d = 15\sqrt{2}$$
$$\cos \alpha = \frac{d}{D}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{15\sqrt{2}}{D}$$
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$\sqrt{2}D = 3 \cdot 15\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}D = 45\sqrt{2} \quad /: \sqrt{2}$$
$$D = 45$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

### Zadanie 29.

Każda krawędź graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego ma długość równą 6.

### Zadanie 29.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe

- A.  $216 + 18\sqrt{3}$       B.  $216 + 54\sqrt{3}$       C.  $216 + 216\sqrt{3}$       **D.  $216 + 108\sqrt{3}$**

*Brudnopis*

$P_b = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$   
6 ścian bocznych

$P_A = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$   
 $P_p = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$   
 $P_c = 216 + 2 \cdot 54\sqrt{3}$   
 $P_c = 216 + 108\sqrt{3}$

### Zadanie 29.2. (0-1)

Oblicz cosinus kąta nachylenia dłuższej przekątnej tego graniastoslupa do płaszczyzny podstawy graniastoslupa. Zapisz obliczenia.

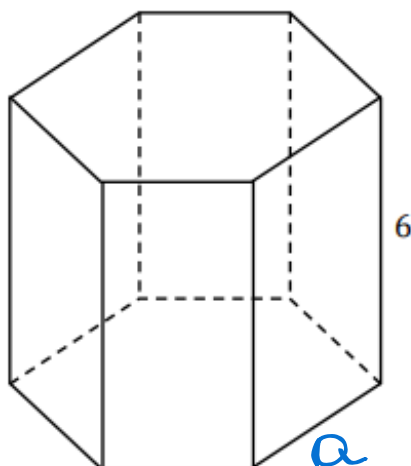
$d = 12$   
 $12^2 + 6^2 = D^2$   
 $144 + 36 = D^2$   
 $180 = D^2$   
 $\sqrt{180} = D$   
 $\cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{180}}$   
 $\cos \alpha = \frac{12}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Wzór na pole trójkąta równobocznego znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 38.

### Zadanie 25.

Wysokość graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 6 (zobacz rysunek). Pole podstawy tego graniastoslupa jest równe  $15\sqrt{3}$ .



### Zadanie 25.1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole jednej ściany bocznej tego graniastoslupa jest równe

A.  $36\sqrt{10}$

B. 60

C.  $6\sqrt{10}$

D. 360

Brudnopis

Pole jednego trójkąta równobocznego w podstawie:

$$P_{\Delta} = \frac{15\sqrt{3}}{6}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$


$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{6} \quad | :\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2}{4} = \frac{15}{6} \quad | \cdot 4$$

$$a^2 = \frac{60}{6} = 10$$

$$a = \sqrt{10} \quad P_{\square} = \sqrt{10} \cdot 6$$

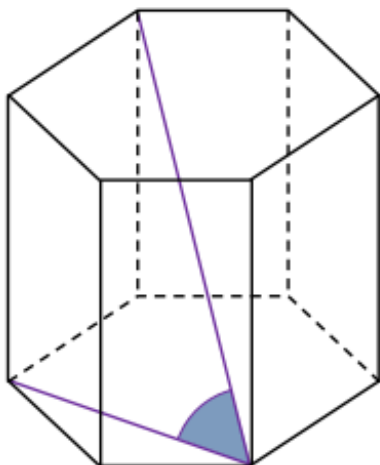
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 25.2. (0–1)** 

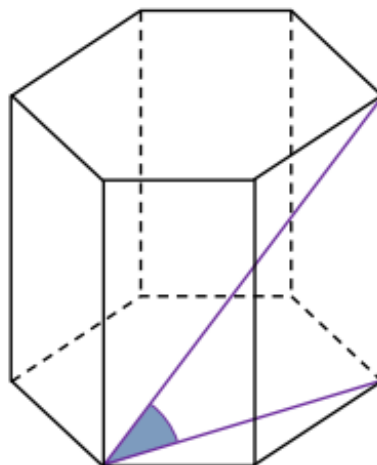
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Kąt nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy jest zaznaczony na rysunku

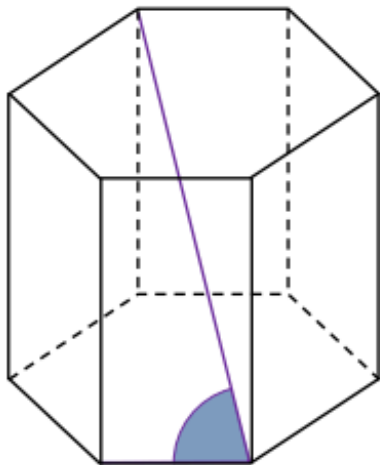
**A.**



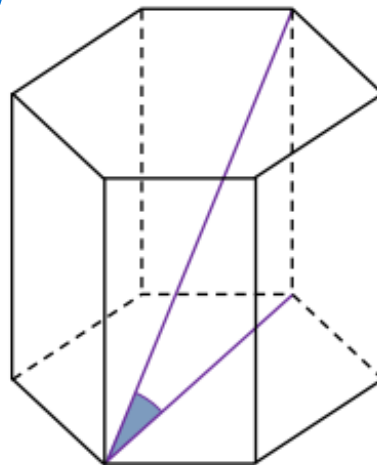
**B.**



**C.**




**D.**



Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

Jak określać i zaznaczać kąty w graniastostupie opisałam i zilustrowałam w e-booku Maturalnego Koncentratu z Matmy na stronie 113 (zadanie 27).

Zadanie 26. (0-1) 

Przekątna ściany sześcianu ma długość  $2\sqrt{2}$ .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego sześcianu jest równa

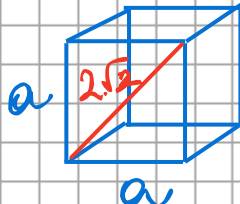
A. 8

B. 24

C.  $\frac{16\sqrt{6}}{9}$

D.  $16\sqrt{2}$

Brudnopis



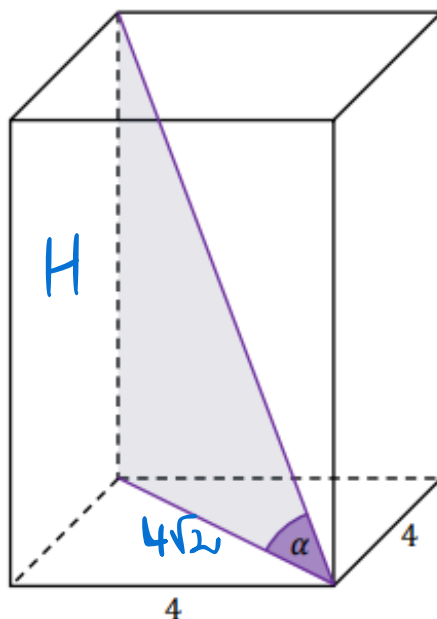
$a^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2$   
 $2a^2 = 4 \cdot 2 \quad | :2$   
 $a^2 = 4$   
 $a = 2$   
 $V = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 27. (0-1)**

Podstawą graniastoslupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku długości 4. Przekątna tego graniastoslupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$  takim, że  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego graniastoslupa jest równa

A. 2

B. 8

C.  $8\sqrt{2}$

D.  $16\sqrt{2}$

Brudnopis

$$\operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{4\sqrt{2}}$$

$$2 = \frac{H}{4\sqrt{2}} \mid \cdot 4\sqrt{2}$$

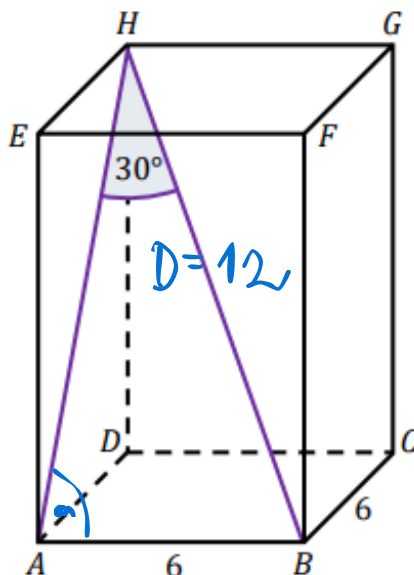
$$2 \cdot 4\sqrt{2} = H$$

$$H = 8\sqrt{2}$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 26. (0-1)**

Dany jest prostopadłościan  $ABCDEFGH$ , w którym podstawy  $ABCD$  i  $EFGH$  są kwadratami o boku długości 6. Przekątna  $BH$  tego prostopadłościanu tworzy z przekątną  $AH$  ściany bocznej  $ADHE$  kąt o mierze  $30^\circ$  (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przekątna  $BH$  tego prostopadłościanu ma długość równą

A.  $4\sqrt{3}$

B.  $6\sqrt{3}$

**C. 12**

D.  $12\sqrt{2}$

Brudnopis

z trójkąta  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  lub

$$\sin 30^\circ = \frac{6}{D}$$


$$D = 12$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{D} \quad | \cdot D$$

$$D \cdot \frac{1}{2} = 6 \quad | \cdot 2$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024



**Zadanie 30. (0–1)** 

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfry się nie powtarzają, jest

A.  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

B.  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

C.  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

D.  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

*Brudnopis*

$$\overline{9} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \overline{7} =$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

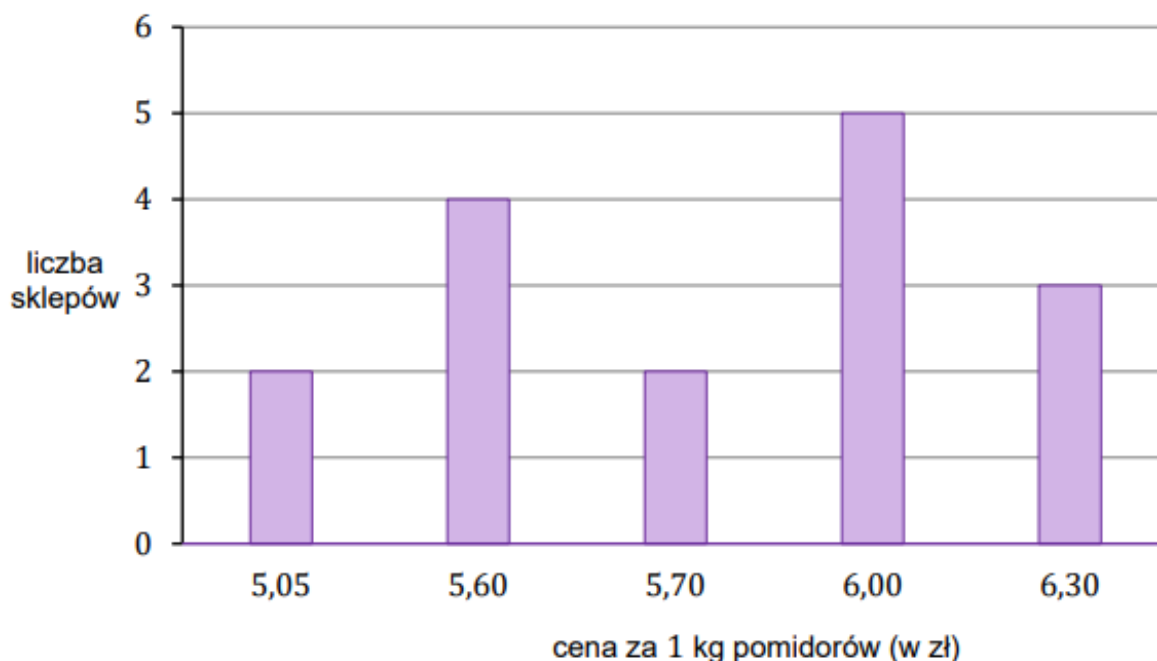




# Diagramy, średnia arytmetyczna i mediana

## Zadanie 29. (0–2)

Na diagramie poniżej przedstawiono ceny pomidorów w szesnastu wybranych sklepach.



Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–E.

29.1.	Mediana ceny kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	C
29.2.	Średnia cena kilograma pomidorów w tych wybranych sklepach jest równa	A

A. 5,80 zł      B. 5,73 zł      C. 5,85 zł      D. 6,00 zł      E. 5,70 zł

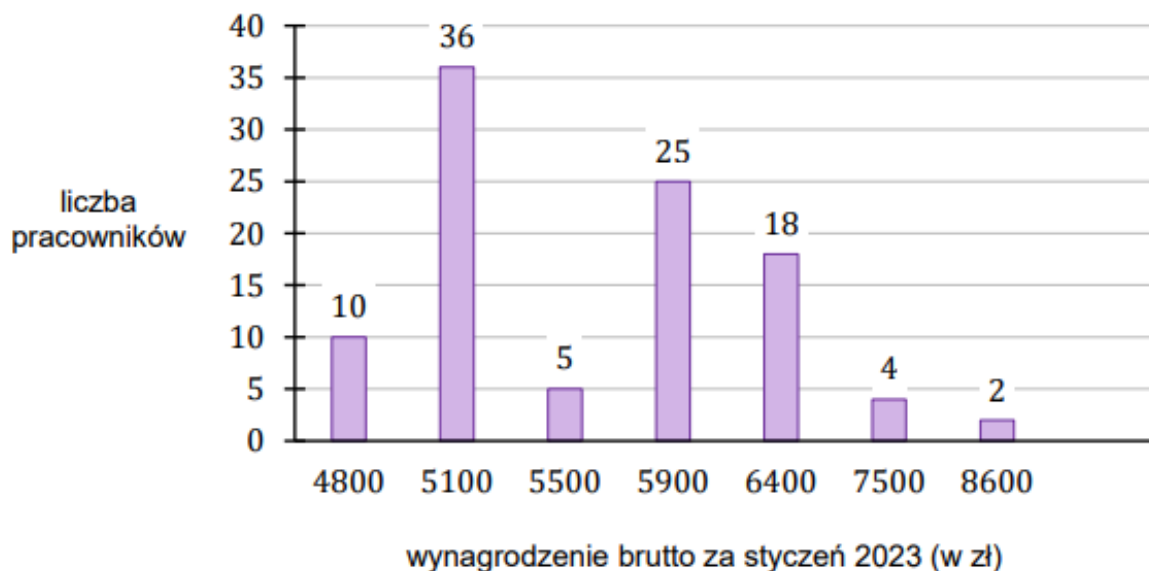
Brudnopis

$$\frac{16}{2} = 8 \quad \text{nr 8. sklepie } 5,7 \text{ zł}$$
$$\text{nr 9. sklepie } 6$$
$$\frac{5,7 + 6}{2} = 5,85 \text{ zł}$$
$$\bar{S}_r = \frac{2 \cdot 5,05 + 4 \cdot 5,6 + 2 \cdot 5,7 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6,3}{16} = 5,8$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

**Zadanie 32. (0–1)**

Na diagramie przedstawiono rozkład wynagrodzenia brutto wszystkich stu pracowników pewnej firmy za styczeń 2023 roku.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.


Średnia wynagrodzenia brutto wszystkich pracowników tej firmy za styczeń 2023 roku jest równa

- A. 5 690 zł      B. 5 280 zł      C. 6 257 zł      D. 5 900 zł

*Burdnopis*

$$\bar{S}_x = \frac{10 \cdot 4800 + 36 \cdot 5100 + 5 \cdot 5500 + 25 \cdot 5900 + 18 \cdot 6400 + 4 \cdot 7500 + 2 \cdot 8600}{100}$$
$$\bar{S}_x = \frac{48000 + 183600 + 27500 + 147500 + 115200 + 30000 + 17200}{100}$$
$$\bar{S}_x = \frac{569000}{100} = 5690$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

**Zadanie 28. (0-1)** 

Średnia arytmetyczna trzech liczb:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , jest równa 9.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Średnia arytmetyczna sześciu liczb:  $a$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $c$ , jest równa

**A.** 9

**B.** 6

**C.** 4,5

**D.** 18

*Brudnopis*

$$\frac{a+b+c}{3} = 9 \quad | \cdot 3$$
$$a+b+c = 27$$
$$\frac{\overbrace{a+b+c}^{27} + \overbrace{a+b+c}^{27}}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024



**Zadanie 28. (0–1)**

W tabeli zestawiono liczbę punktów uzyskanych przez 32 uczniów pewnej klasy za rozwiązanie jednego z zadań testu z matematyki.

Liczba punktów	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów	2	2	5	6	11	6

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych za rozwiązanie tego zadania przez uczniów tej klasy jest równa

A. 2,5

B. 3,25

C. 3,31

D. 4

Brudnopis

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 6}{32} = \frac{104}{32} = 3,25$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

# Prawdopodobieństwo

## Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru ośmiu liczb  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15. Zapisz obliczenia.

Liczby, których iloczyny są podzielne przez 15:

3,5    5,3    5,6    6,5    9,5    5,9

6 opcji

wszystkich opcji:  $8 \cdot 8 = 64$

prawdopodobieństwo:  $\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

---

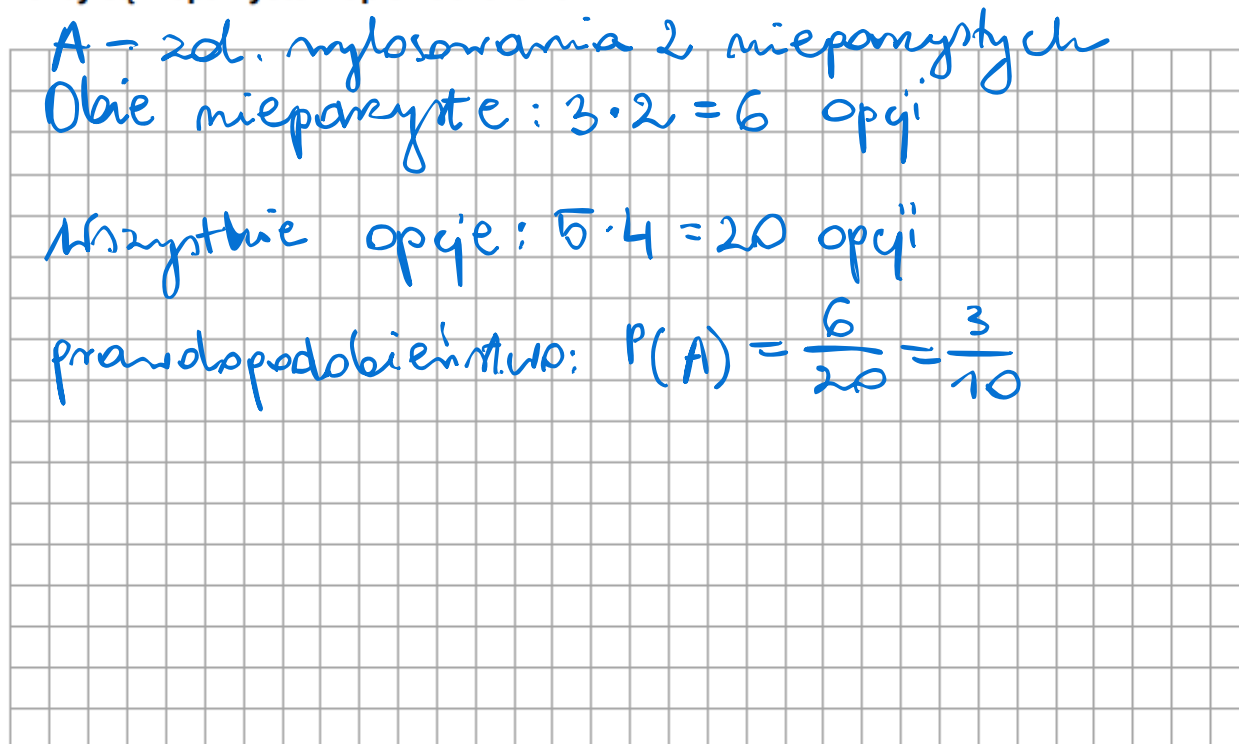
Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Obliczanie prawdopodobieństwa opisałam na 116 w Maturalnym Koncentracie z Matmy, zadanie 28.

**Zadanie 31. (0–2)**

Ze zbioru pięciu liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  losujemy bez zwracania kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że obie wylosowane liczby są nieparzyste. Zapisz obliczenia.



A - zd. wylosowania 2 nieparzystych  
Obie nieparzyste:  $3 \cdot 2 = 6$  opcji  
Wszystkie opcje:  $5 \cdot 4 = 20$  opcji  
Prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

Jeśli losujemy bez zwracania to przy drugim losowaniu mamy o jedną mniej opcję. Dlatego wylosowanie dwóch nieparzystych to  $3 \cdot 2$  (za pierwszym razem możemy wyciągnąć 3 nieparzyste, a za drugim już tylko jedną, bo jedną nieparzystą wyciągnęliśmy za pierwszym razem).

**Zadanie 30. (0-1)**

W pudełku znajdują się wyłącznie kule białe i czarne. Kul czarnych jest 18.  
Z tego pudełka w sposób losowy wyciągamy jedną kulę.  
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wyciągniemy kulę czarną,  
jest równe  $\frac{3}{5}$ .

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba kul białych w pudełku, przed wyciągnięciem jednej kuli, była równa

A. 9

B. 12

C. 15

D. 30

*Brudnopis*

$x$  - kule białe      A - wyciągnięcie czarnej  
 $x + 18$  - liczba wszystkich kul

$$P(A) = \frac{3}{5}$$
$$P(A) = \frac{18}{x+18}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{18}{x+18}$$
$$3x + 54 = 90$$
$$3x = 36 \quad | :3$$
$$x = 12$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 31. (0-2)**

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że w pierwszym rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w drugim rzucie. Zapisz obliczenia.

Opcje zdarzenia  $A$ :

2,1    3,1    4,1    5,1    6,1

3,2    4,2    5,2    6,2

4,3    5,3    6,3

5,4    6,4

6,5

15 opcji

Wszystkich opcji  $\bar{\Omega} = 6 \cdot 6 = 36$

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

**Zadanie 29. (0-2)**

Dane są dwa zbiory:  $C = \{0, 4, 5, 7, 9\}$  oraz  $D = \{1, 2, 3\}$ .

Losujemy jedną liczbę ze zbioru  $C$ , a następnie losujemy jedną liczbę ze zbioru  $D$ .

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie większa od 9. Zapisz obliczenia.

Opcje na zdarzenie  $A$ :

7,3    9,1    9,2    9,3

Opcji:  $\bar{A} = 4$

Wszystkich opcji  $\bar{\Omega} = 5 \cdot 3 = 15$

bo 5  
liczb w  $C$

↑  
bo 3 liczby w  $D$

$$P(A) = \frac{4}{15}$$

---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2024

# Optymalizacja

## Zadanie 31.

Właściciel pewnej apteki przeanalizował dane dotyczące liczby obsługiwanych klientów z 30 kolejnych dni. Przyjmijmy, że liczbę  $L$  obsługiwanych klientów  $n$ -tego dnia opisuje funkcja

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną spełniającą warunki  $n \geq 1$  i  $n \leq 30$ .

## Zadanie 31.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Łączna liczba klientów obsługanych w czasie wszystkich analizowanych dni jest równa $L(30)$ .	P	<input checked="" type="radio"/> F
W trzecim dniu analizowanego okresu obsłużono 336 klientów.	<input checked="" type="radio"/> P	F

*Bрудnopis*

$$L(3) = -3^2 + 22 \cdot 3 + 279 = -9 + 66 + 279 = 336$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Dzięki tej funkcji możemy policzyć ile danego dnia było klientów, a nie ilu ich było łącznie we wszystkie dni.

**Zadanie 31.2. (0-2)**

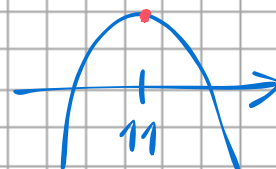
Którego dnia analizowanego okresu w aptece obsłużono największą liczbę klientów? Oblicz liczbę klientów obsłużonych tego dnia. Zapisz obliczenia.

$$L(n) = -n^2 + 22n + 279$$

$$p = -\frac{22}{-2} = 11$$

11. dnia było najwięcej klientów.

Liczymy ile:



$$L(11) = -11^2 + 22 \cdot 11 + 279 = -121 + 242 + 279 = 400$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2023

Jest to funkcja kwadratowa, z ramionami skierowanymi ku dołowi. Zatem największa wartość jest w wierzchołku.

Uwaga: gdyby wyszło nam np. że  $p = -3$  to wierzchołek nie należy do dziedziny (nie ma przecież dnia minus trzeciego). Wtedy policz wartości na krańcach przedziału (w naszym wypadku dla 1. dnia i dnia 30.) i wybierz większą wartość.

Wzór na  $p$  (pierwszą współrzędną, czyli  $x$ , wierzchołka) znajduje się w Karcie Wzorów na stronie 17.

**Zadanie 33. (0-4)**

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

- przychód  $P$  (w złotych) ze sprzedaży  $x$  krzesel można opisać funkcją  $P(x) = 196x$
- koszt  $K$  (w złotych) produkcji  $x$  krzesel dziennie można opisać funkcją

$$K(x) = 4x^2 + 4x + 240$$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel.

**Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk.**

**Zapisz obliczenia.**

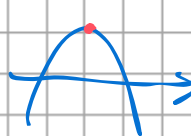
*Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.*

Napiszemy funkcję obliczającą zysk  $Z(x)$ .

Zysk to przychód - koszty.  $D = (0, 30]$

$$Z(x) = P(x) - K(x)$$
$$Z(x) = 196x - (4x^2 + 4x + 240) =$$
$$= 196x - 4x^2 - 4x - 240 = -4x^2 + 192x - 240$$
$$p = -\frac{192}{2 \cdot (-4)} = -\frac{192}{-8} = 24 \text{ krzesła}$$

Liczymy zysk:

$$Z(24) = -4 \cdot (24)^2 + 192 \cdot 24 - 240 = -4 \cdot 576 +$$
$$+ 4608 - 240 = -2304 + 4608 - 240 =$$
$$= 2064 \text{ zł}$$


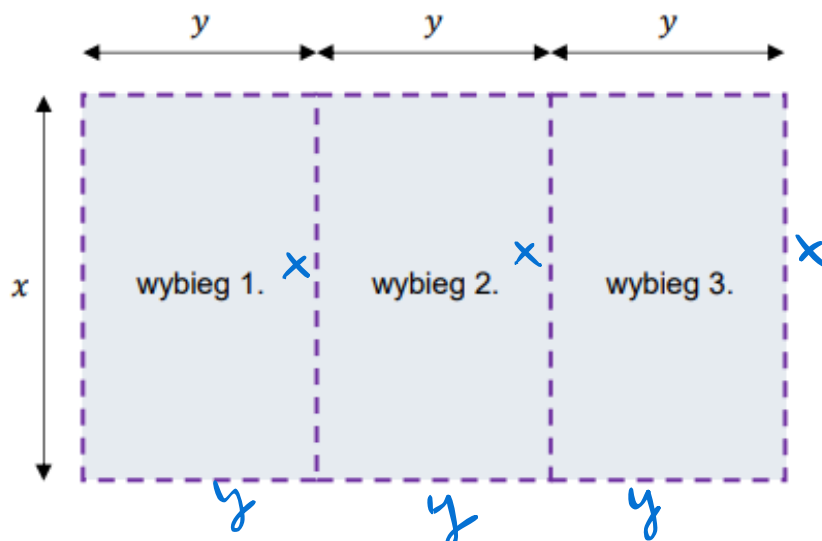
---

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z sierpnia 2023

**Zadanie 31. (0-4)**

W schronisku dla zwierząt, na płaskiej powierzchni, należy zbudować ogrodzenie z siatki wydzielające trzy identyczne wybiegi o wspólnych ścianach wewnętrznych. Podstawą każdego z tych trzech wybiegów jest prostokąt (jak pokazano na rysunku). Do wykonania tego ogrodzenia należy zużyć 36 metrów bieżących siatki.

Schematyczny rysunek trzech wybiegów (widok z góry).  
Linia przerywaną zaznaczono siatkę.



Oblicz wymiary  $x$  oraz  $y$  jednego wybiegu, przy których suma pól podstaw tych trzech wybiegów będzie największa. W obliczeniach pominiij szerokość wejścia na każdy z wybiegów. Zapisz obliczenia.

$6y + 4x = 36$   
 $6y = 36 - 4x \quad | :6$   
 $y = 6 - \frac{2}{3}x$

$P(x) = x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y$   
 $P(x) = 3xy = 3x \left(6 - \frac{2}{3}x\right)$   
 $P(x) = 18x - 2x^2$   
 $P(x) = -2x^2 + 18x$

$P(x):$   
 $P = \frac{-18}{2 \cdot (-2)}$

$P = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2} \rightarrow x$   
 $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6 - \frac{6}{2} = 6 - 3 = 3 \rightarrow y$   
 Czyli  $x = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ m}$   
 $y = 3 \text{ m}$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z maja 2024

**Zadanie 32. (0–2)**

Właściciel sklepu z zabawkami przeprowadził lokalne badanie rynkowe dotyczące wpływu zmiany ceny zestawu klocków na liczbę kupujących ten produkt. Z badania wynika, że dzienny przychód  $P$  ze sprzedaży zestawów klocków, w zależności od kwoty obniżki ceny zestawu o  $x$  zł, wyraża się wzorem

$$P(x) = (70 - x)(20 + x)$$

gdzie  $x$  jest liczbą całkowitą spełniającą warunki  $x \geq 0$  i  $x \leq 60$ .

Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź, wybraną spośród oznaczonych literami A–E.

32.1.	Dzienny przychód ze sprzedaży zestawów klocków będzie największy, gdy liczba $x$ jest równa	A
32.2.	Dzienny przychód ze sprzedaży zestawów klocków będzie równy <u>800</u> zł, gdy liczba $x$ jest równa	E

A. 25

B. 30

C. 45

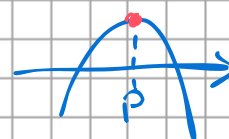
D. 50

E. 60

Brudnopis

$$P(x) = (70 - x)(20 + x) = 1400 + 70x - 20x - x^2 =$$

$$= -x^2 + 50x + 1400$$



$$p = -\frac{50}{2 \cdot (-1)} = \frac{-50}{-2} = 25$$

$$P(x) = \underline{800}$$

$$-x^2 + 50x + 1400 = \underline{800}$$

$$-x^2 + 50x + 1400 - 800 = 0$$

$$-x^2 + 50x + 600 = 0$$

$$\Delta = 50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 600$$

$$\Delta = 2500 + 2400 =$$

$$= 4900 \quad \sqrt{\Delta} = 70$$

$$x_1 = \frac{-50 + 70}{-2} = \underline{-10}$$

$$x_2 = \frac{-50 - 70}{-2} = 60$$

Zadanie pochodzi z arkusza maturalnego z czerwca 2024

Aby rozwiązać równanie kwadratowe trzeba policzyć deltę i miejsca zerowe. Wzór na stronie 16 Karty Wzorów.